Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

Genehmigt von der philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von
WERNER JENNE
aus
Berlin-Cöpenick

Tag der Promotion: 2. März 1928

Referenten: Professor Dr. v. MISES
Professor Dr. PLANCK

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus:
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Band 8, 1928, Seite 18 bis 44.

Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation.

Von **WERNER JENNE.**

[Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin.] [1])

Die meisten festen Körper deformieren sich bekanntlich bei hinreichend kleinen Spannungen elastisch, d. h. es besteht eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Spannung und Deformation, derart, daß bei verschwindender Spannung auch die Deformation verschwindet. Dies ist jedoch nur näherungsweise richtig; genaue Untersuchungen haben ergeben, daß rein elastische, d. h. vollkommen rückgängige Deformation überhaupt nicht vorkommt. Vielmehr ist jede elastische Deformation von einer, wenn auch häufig sehr geringfügigen, bleibenden Formänderung begleitet [2]). Mit wachsender Beanspruchung des Materials werden auch die bleibenden Formänderungen immer größer; denjenigen Spannungszustand, bei welchem zuerst erhebliche bleibende Formänderungen beobachtet werden, nennt man die Elastizitätsgrenze des Materials. Daneben gibt es bei sehr vielen Stoffen eine Grenze der Belastung, bei deren Erreichung plötzlich unter konstanter oder sogar abnehmender Last sehr erhebliche Formänderungen eintreten, die man nicht mehr als elastische betrachten kann. Man sagt, das Material deformiere sich plastisch, es fließe, und bezeichnet diese Grenze als die Fließgrenze des Materials.

Da solche Deformationsvorgänge auf sehr vielen wichtigen Gebieten der Technik eine große Rolle spielen und da die Elastizitätstheorie auf Fließvorgänge nicht angewendet werden kann, hat es sich als notwendig erwiesen, eine eigene mathematische Theorie der Plastizität zu schaffen. Saint-Venant hat als erster die Mechanik der Kontinua auf diese Art der Deformation fester Körper angewendet und damit die mathematische Plastizitätstheorie begründet. Einen vollständigen Ansatz von Bewegungsgleichungen für die plastische Deformation fester Körper hat Hr. v. Mises gegeben in seiner im Jahre 1913 erschienenen Schrift: »Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand« [3]). Diese Theorie ist bisher noch wenig angewendet worden; man hat sich im allgemeinen auf die Untersuchung der Spannungsverteilungen bei plastischer Deformation beschränkt. In neuerer Zeit haben die Herren Hencky, Prandtl und Nádai die Spannungsverteilung im ebenen und im axialsymmetrischen Fall der plastischen Deformation untersucht. Die vorliegende Arbeit enthält ähnliche Untersuchungen für kompliziertere räumliche Spannungsverteilungen.

In **1.** gebe ich kurz die Grundgleichungen der Mechanik für plastisch-deformable Körper an. Es werden ferner gewisse Differentialbeziehungen abgeleitet, die den Kompatibilitätsbedingungen der Elastizitätstheorie entsprechen und daher als die Kompatibilitätsbedingungen der mathematischen Plastizitätstheorie bezeichnet werden können.

In **2.** diskutiere ich die bekanntesten Annahmen über die Natur der Fließgrenze. Nach den neuesten Versuchsergebnissen erscheint es zweifelhaft, ob die Mohrsche Annahme, daß es auf die der Größe nach mittlere Hauptspannung nicht ankommt, den Tatsachen entspricht. Die Versuche sprechen vielmehr für die von Hrn. v. Mises aufgestellte Hypothese, wonach die Summe der Quadrate der Hauptschubspannungen während der Dauer des Fließvorganges konstant ist oder doch nahezu konstant bleibt. Im Anschluß hieran wird eine neue Methode der Darstellung von Versuchsergebnissen angegeben, die die Unterschiede zwischen den einzelnen Fließbedingungen besonders deutlich hervortreten läßt.

In **3.** behandle ich die Gleichgewichtsbedingung für kontinuierlich ausgedehnte Medien bei Fehlen äußerer Kräfte; mit Hilfe eines neueingeführten Begriffs, der Winkelgeschwindigkeitsdyade des Hauptachsenkreuzes des Spannungstensors, werden gewisse Formeln abgeleitet, durch welche die lokalen Aenderungen der Größen der Hauptspannungen ausgedrückt werden können durch die Elemente der Drehung des Hauptachsenkreuzes des Spannungstensors und durch die Hauptschubspannungen.

Diese Formeln wende ich in **4.** auf verschiedene Gleichsgewichtsprobleme der plastischen Deformation an. Das ebene Problem ist schnell erledigt; die Henckyschen

[1]) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Dr.-Dissertation angenommen worden. Referenten: Prof. v. Mises und Prof. M. Planck.

[2]) Vergl. z. B. Th. v. Kármán, Enz. d. Math. Wissensch., Bd. IV, Teil 4, S. 699.

[3]) Nachrichten der K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1913.

Ergebnisse für diesen Fall folgen leicht aus den allgemeinen Formeln. Ich behandle dann den Fall gleicher Spannungszustände in den Normalebenen einer gegebenen Raumkurve, der das axialsymmetrische Problem der plastischen Deformation als Spezialfall enthält; mit Hilfe der erwähnten Formeln wird gezeigt, daß die hauptsächlichsten Ergebnisse von Hrn. Hencky im axialsymmetrischen Fall auch für dieses allgemeinere Problem gelten. Im letzten Abschnitt dieses Paragraphen behandle ich als weitere Verallgemeinerung des ebenen Problems die Annahme gleicher Spannungszustände in beliebigen Parallelflächen; dabei wird gezeigt, daß unter speziellen Annahmen über die Spannungsverteilung die auf gekrümmten Flächen verlaufenden Linien größter Hauptschubspannung ähnlichen differentialgeometrischen Gesetzen genügen, wie sie Hr. Hencky für die »Gleitlinien« im ebenen Fall der plastischen Deformation gefunden hat.

In **5.** wende ich die zu Anfang abgeleiteten Kompatibilitätsbedingungen auf einige der behandelten Probleme an. Beim ebenen Problem können die Kompatibilitätsbedingungen durch eine — ohnehin übliche — allgemeine Annahme über die Größe der drei Hauptspannungen befriedigt werden; dagegen ist ihre Erfüllbarkeit bei den übrigen behandelten Problemen nicht sichergestellt. Da aber die Kompatibilitätsbedingungen erst aus der bisher noch nicht endgültig bestätigten Annahme einer linearen Abhängigkeit von Spannungstensor und Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten folgen, so kann die Frage offen gelassen werden, ob die hier behandelten allgemeineren Spannungsverteilungen nicht doch möglich sind.

1. Die Grundgleichungen der Mechanik für plastisch-deformable Körper. Der Spannungstensor sei gegeben durch das Schema

$$\mathfrak{P} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_x & \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \mathfrak{p}_y & \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \mathfrak{p}_z & \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bezogen auf ein beliebiges rechtshändiges rechtwinkliges Koordinatensystem, und, auf seine Hauptachsen bezogen, durch

$$\mathfrak{P} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}_2 & 0 & \sigma_2 & 0 \\ \mathfrak{p}_3 & 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wobei sich der einer beliebigen Richtung ν zugeordnete Vektor $\mathfrak{p}_\nu$ bestimmt durch die Transformationsformel:

$$\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_x \cos(\nu, x) + \mathfrak{p}_y \cos(\nu, y) + \mathfrak{p}_z \cos(\nu, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die in bekannter Weise durch Annahme spezieller Lagen des Koordinatensystems erhältlichen Extremwerte der Tangentialspannung, die man als Hauptschubspannungen bezeichnet, sind gegeben durch die Beziehungen

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_4 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

sie genügen der Bedingung: $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$

Aehnlich dem aus der Elastizitätstheorie bekannten Begriff der Deformationsdyade

$$\mathfrak{D} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x, & \gamma_z, & \gamma_y \\ \gamma_z, & \varepsilon_y, & \gamma_x \\ \gamma_y, & \gamma_x, & \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

führt man hier die Dyade $\overline{\vartheta}$ der Deformationsgeschwindigkeiten ein mit dem Schema

$$\overline{\mathfrak{D}} = \begin{Bmatrix} \lambda_x, & \nu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & \lambda_y, & \nu_x \\ \nu_y, & \nu_x, & \lambda_z \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei man die Dehnungsgeschwindigkeiten λ_x, λ_y λ_z und die Schiebungsgeschwindigkeiten ν_x, ν_y, ν_z aus den Komponenten v_x, v_y, v_z des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ erhält durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \lambda_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \nu_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \quad \nu_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \quad \nu_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Erfahrungstatsache, daß sich bei Erreichung der Fließgrenze alle festen Körper im wesentlichen so verhalten wie eine zähe, nahezu inkompressible Flüssigkeit, führt zu der Annahme, daß hier eine Abhängigkeit der Spannungen von den Deformationsgeschwindigkeiten besteht, ähnlich der linearen Abhängigkeit des Spannungstensors von dem Deformationstensor in der Elastizitätstheorie. Jedoch muß man zunächst von der Spannungsdyade $\mathfrak{P}$ einen Bestandteil abziehen, der einer allseits gleichen Spannung entspricht, da eine solche Beanspruchung erfahrungsgemäß keine endliche Deformationsgeschwindigkeit hervorruft. Bezeichnet man Druck stets als negativ, Zug als positiv, und versteht man unter $\mathfrak{E}$ die sogenannte Einheitsdyade

$$\mathfrak{E} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\},$$

so erhält man die gewünschte reduzierte Spannungsdyade $\mathfrak{P}'$, indem man von $\mathfrak{P}$ einen Bestandteil $-p\,\mathfrak{E}$ abzieht, das heißt durch die Beziehung

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} + p\,\mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Hierbei bleiben die Tangentialspannungen erhalten und zwischen den Normalkomponenten der beiden Tensoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ bestehen die Beziehungen

$$\sigma_x' = \sigma_x + p\,, \qquad \sigma_y' = \sigma_y + p\,, \qquad \sigma_z' = \sigma_z + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Entsprechend der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Elastizitätstheorie nimmt man nun die Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{P}'$ und $\overline{\mathfrak{D}}$ als linear an mit der Bedingung, daß beide Tensoren gleiche Hauptachsenrichtungen haben, so daß sich zum Beispiel zwischen den Hauptwerten σ_1' und λ_1 die Beziehung ergeben würde

$$\sigma_1' = k\,\lambda_1 + k'\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Da wir aber Inkompressibilität voraussetzen, so besteht die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

und man erhält somit die einfacheren Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x' = \sigma_x + p = k \cdot \lambda_x\,, \qquad \sigma_y' = \sigma_y + p = k \cdot \lambda_y\,, \qquad \sigma_z' = \sigma_z + p = k \cdot \lambda_z \\ \tau_x = k \cdot \nu_x\,, \qquad \tau_y = k \cdot \nu_y\,, \qquad \tau_z = k \cdot \nu_z \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

oder, als Tensorgleichung geschrieben

$$\mathfrak{P}' = k \cdot \overline{\mathfrak{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Aus (11) und (12) folgt

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + 3\,p = k \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

oder

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

k ist hier eine Reaktionsgröße, die man aus der Kenntnis der Bewegung selbst zu bestimmen hat, und zwar mit Hilfe der Erfahrungstatsache, daß während der plastischen Deformation die Spannung an der Fließgrenze bleibt. Mit dieser Annahme, die sich hauptsächlich auf die bekannten Beobachtungen bei der einachsigen Zugbeanspruchung eines geraden Stabes stützt, schließt man allerdings die Erscheinungen der sogenannten Verfestigung von der Betrachtung aus.

Da die sechs Komponenten der Dyade der Deformationsgeschwindigkeiten nur von den drei Größen v_x, v_y, v_z abhängen, so müssen gewisse identische Beziehungen zwischen ihnen bestehen. Aus der linearen Abhängigkeit des Spannungstensors von dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten — Gleichungen (12) — folgen dann aber gewisse Bedingungen für die sechs Komponenten des Spannungstensors, ähnlich den sogenannten Kompatibilitäts- oder Verträglichkeitsbedingungen in der Elastizitätstheorie. Diese Bedingungen sollen im folgenden für die Plastizitätstheorie abgeleitet werden.

Differenziert man die Gleichung

$$\lambda_y = \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y}$$

zweimal nach z, die Gleichung

$$\lambda_z = \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}$$

zweimal nach y und addiert die beiden erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial\, z^2} + \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial\, y^2} = \frac{\partial^3 v_y}{\partial\, y\, \partial\, z^2} + \frac{\partial^3 v_z}{\partial\, y^2\, \partial\, z} = 2\,\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial\, y\, \partial\, z}$$

und entsprechend für die übrigen Komponenten

$$\frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial z^2} = 2\,\frac{\partial^2 r_y}{\partial x\,\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 r_z}{\partial x\,\partial y}.$$

Differenziert man ferner die Gleichungen

$$r_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \qquad r_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \qquad r_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

der Reihe nach nach x, y, z, so ergibt sich

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r_y}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y}\right), \qquad \frac{\partial r_y}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z}\right), \qquad \frac{\partial r_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial z}\right)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit -1 und addiert dann alle drei Gleichungen, so erhält man

$$-\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z}$$

oder, unter Beachtung der aus $\lambda_x = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ durch Differentiation nach y und z folgenden Beziehung

$$\frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 v_x}{\partial x\,\partial y\,\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}\right).$$

Ganz entsprechend findet man

$$\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r_x}{\partial x} - \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} - \frac{\partial r_z}{\partial z}\right).$$

Bezeichnet man also mit A, B, C, L, M, N die folgenden sechs Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
A &= 2\,\frac{\partial^2 r_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial y^2} \\
B &= 2\,\frac{\partial^2 r_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial z^2} \\
C &= 2\,\frac{\partial^2 r_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} \\
L &= \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}\right) \\
M &= \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r_x}{\partial x} - \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}\right) \\
N &= \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} - \frac{\partial r_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

so haben die Komponenten der Dyade der Deformationsgeschwindigkeiten die sechs identischen Bedingungen zu erfüllen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad \ldots \quad (16).$$

Beltrami hat bemerkt[1]), daß zwischen den Größen A, B, C, L, M, N folgende drei Differentialrelationen bestehen, die man durch Differenzieren leicht bestätigt:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \qquad (17).$$

Diese Beziehungen haben genau die Form der Gleichgewichtsbedingungen für die Deformation eines festen Körpers bei Fehlen äußerer Kräfte.

Führt man der Einfachheit halber in den Gl. (12) statt der Reaktionsgröße k ihren reziproken Wert ein

$$q = 1/k,$$

so erhalten diese Gleichungen die Form

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= q\,(\sigma_x + p), & \lambda_y &= q\,(\sigma_y + p), & \lambda_z &= q\,(\sigma_z + p) \\
r_x &= q \cdot \tau_x, & r_y &= q \cdot \tau_y, & r_z &= q \cdot \tau_z.
\end{aligned}$$

Aus (15) und (16) ergeben sich mithin für die Spannungsgrößen σ_x, σ_y, σ_z τ_x, τ_y, τ_z sechs identische Beziehungen, von denen ich jedoch nur zwei angebe, da man die übrigen durch zyklische Vertauschung leicht aus ihnen erhält:

---

[1]) E. Beltrami, Roma Acc. Linc. Rendiconti Ser. 5, 1^1, 1892.

$$\left.\begin{aligned}
&q\cdot\left[\frac{\partial^2(\sigma_y+p)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2(\sigma_z+p)}{\partial y^2}\right]+2\,\frac{\partial(\sigma_y+p)}{\partial z}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}+2\cdot\frac{\partial(\tau_z+p)}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+(\sigma_y+p)\,\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\\
&\qquad+(\sigma_z+p)\,\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=2\left[q\cdot\frac{\partial^2\tau_x}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial\tau_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial\tau_x}{\partial z}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+\tau_x\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial y\,\partial z}\right]\\
&q\cdot\frac{\partial^2(\sigma_x+p)}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial(\sigma_x+p)}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial(\sigma_x+p)}{\partial z}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+(\sigma_x+p)\,\frac{\partial^2 q}{\partial y\,\partial z}\\
&\qquad=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\tau_x\frac{\partial q}{\partial x}+\tau_y\frac{\partial q}{\partial y}+\tau_z\frac{\partial q}{\partial z}+q\left(-\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Dies sind — unter der Annahme einer linearen Abhängigkeit von Spannungstensor und Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten — die Kompatibilitätsbedingungen der mathematischen Plastizitätstheorie, formal sechs Gleichungen, die aber, wegen der Beltramischen Beziehungen (17) und weil sie noch die Reaktionsgröße q enthalten, tatsächlich nur zwei Gleichungen entsprechen.

Bezeichnet man die spezifische Masse des betrachteten Körpers mit μ, die auf das Volumelement wirkende äußere Kraft, etwa die Schwerkraft, mit $\bar{\gamma}$, so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Fließvorganges, in eine Vektorgleichung zusammengefaßt, so schreiben:

$$\mu\frac{d\,\mathfrak{v}}{dt}=\bar{\gamma}-\operatorname{grad}p+\nabla\mathfrak{P}'\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(19)$$

mit

$$\nabla\mathfrak{P}'=\frac{\partial\mathfrak{p}'_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{p}'_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{p}'_z}{\partial z}\quad.\quad.$$

Zu den so erhaltenen Grundgleichungen — Formeln (11), (13), (19) — muß noch eine Annahme über die Natur der Fließgrenze treten, als der Wirklichkeit möglichst genau angepaßte Formulierung der bereits erwähnten Erfahrungstatsache, daß beim einfachen Zugversuch die Spannung nach Erreichung der Fließgrenze unverändert bleibt. Dann aber haben wir in den drei Gl. (19), der Plastizitätsbedingung und den oben abgeleiteten zwei Kompatibilitätsbedingungen sechs Gleichungen zur Verfügung und sind somit formal in der Lage, die sechs Spannungsgrößen allein, ohne Berücksichtigung der Deformationen, zu bestimmen.

2. Die Annahmen über die Natur der Fließgrenze; Hauptschubspannungslinien. Die grundlegenden Untersuchungen über die Natur der Bruch- und Fließgrenze stammen von Mohr[1]); seine Ueberlegungen werden am besten verständlich, wenn man die folgende, von ihm selbst angegebene, ebene geometrische Darstellung des räumlichen Spannungszustandes benutzt (vergl. Abb. 1). Auf der einen Achse eines ebenen kartesischen Koordinatensystems werden vom Anfangspunkt aus die Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 für einen beliebigen Körperpunkt nach Größe und Vorzeichen aufgetragen und es werden die drei Kreise gezeichnet, die durch je zwei der Endpunkte der abgetragenen Strecken gehen und deren Mittelpunkte auf dieser Achse liegen. Die Radien dieser Kreise haben die Längen

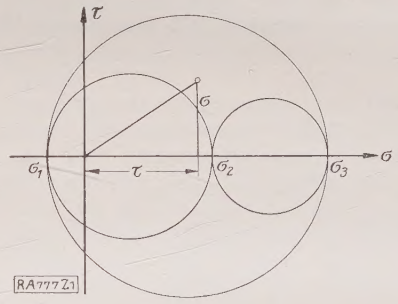

Abb. 1.

$$\left|\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}\right|=|\tau_1|,\qquad\left|\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right|=|\tau_2|,\qquad\left|\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right|=|\tau_3|.$$

Dem Spannungsvektor, der einem beliebigen Flächenelement durch den betrachteten Körperpunkt zugeordnet ist, entspricht in der graphischen Darstellung ein Vektor vom Koordinatenanfangspunkt nach einem Punkte im Innern eines der beiden von den drei Kreisen gebildeten Bogendreiecke, und zwar ergeben die Horizontal- und die Vertikalkomponente dieses Vektors die Normal- und die Tangentialkomponente des dem Flächenelement zugeordneten Spannungsvektors. Die Spannungsendpunkte für alle einer Hauptebene angehörenden Richtungen liegen dann auf dem betreffenden Kreise, alle übrigen in dem von den drei Kreisen eingeschlossenen Kreisbogendreieck.

[1]) O. Mohr, Abhandlungen z. techn. Mechanik, Berlin 1913, Abhandl. V.

An Hand dieser Darstellung läßt sich die Mohrsche Annahme über die Natur der Bruchgrenze folgendermaßen charakterisieren: Die der Größe nach mittlere Hauptspannung kommt bei der Beurteilung der Gefährlichkeit eines Spannungszustandes nicht in Betracht; die somit allein maßgebenden Kreise mit größtem Radius besitzen eine Einhüllende, die sogenannte Mohrsche Grenzkurve. Bezeichnet man die Hauptspannungen der Größe nach mit σ_3, σ_2, σ_1 $\quad \sigma_3 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_1$,

so drückt sich die Mohrsche Annahme aus durch die Gleichung

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wobei die Funktion f durch die Mohrsche Grenzkurve definiert ist. In jedem Punkte des beanspruchten Körpers bilden sich nach Mohr zwei Gleitflächen, die durch die der mittleren Hauptspannung σ_2 entsprechende Hauptachse gehen und einen festen Winkel miteinander einschließen; dieser Winkel ist gleich demjenigen, welchen der vom Mittelpunkt des größten der drei Mohrschen Kreise nach einem der beiden Berührungspunkte dieses Kreises mit der Mohrschen Grenzkurve gezogene Strahl mit der σ-Achse bildet. Bekanntlich zeigt die Mohrsche Grenzkurve, wenn man die Bedingungen des Bruchs untersucht, auf der Zug- und Druckseite ein sehr verschiedenes Verhalten. Jedoch steht noch nicht fest, ob auch für die Grenze des elastischen Verhaltens ein so großer Unterschied zwischen Zug- und Druckversuch besteht. Eine Annahme, die diesem Umstande Rechnung trägt, ist die von Guest, der die maximale Schubspannung als konstant annimmt. Die Guestsche Plastizitätsbedingung lautet also

$$\tau_{max} = K = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II);$$

die Mohrsche Grenzkurve ist in diesem Falle eine Parallele zur σ-Achse und der Winkel der beiden Gleitebenen gegeneinander stets gleich 90 Grad. Hr. v. Mises macht an Stelle der Mohrschen Annahme den Ansatz [1])

$$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 = 2K^2 = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III),$$

d. h. er nimmt an, daß der Beginn des Fließvorganges gleichmäßig von der Größe aller drei Hauptspannungen abhängt, wofür gerade die neuesten Versuchsergebnisse sprechen. Ein etwaiger Unterschied zwischen dem Zug- und Druckversuch läßt sich leicht dadurch berücksichtigen, daß man diesem Ansatz die erweiterte Form gibt

$$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV).$$

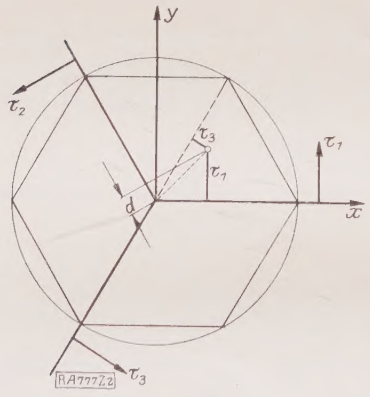

Abb. 2.

Für diese Annahme [2]) sprechen besonders die in letzter Zeit angestellten Versuche von Hrn. Lode in Göttingen [3]) und die Ausführungen von Hrn. F. Schleicher in Karlsruhe [4]). Eine bequeme Uebersicht über das Verhältnis der geschilderten vier Annahmen zueinander dürfte die folgende Darstellungsmethode bieten:

Man benutze folgendes vierachsige Koordinatensystem: Zunächst wähle man drei Achsen in einer Ebene, etwa der Horizontalebene, unter Winkeln von 120° gegeneinander; damit ist jeder Punkt dieser Ebene charakterisiert durch seine Abstände von drei Achsen. Die Summe dieser drei Abstände ist bekanntlich gleich Null; wir können sie daher mit τ_1, τ_2, τ_3 bezeichnen und die K-Werte auf der vertikalen Achse abtragen, so daß nunmehr das Ergebnis eines jeden Einzelversuchs durch einen Raum-

[1]) v. Mises, Mechanik fester Körper im plastisch-deformablen Zustand, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1913.

[2]) Diese Hypothese ist zum ersten Mal von Hrn. v. Mises in einem Vortrage vor dem Ausschuß für Technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure am 17. Juli 1925 ausgesprochen worden.

[3]) Vergl. den kurzen Bericht in dieser Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 142

[4]) Desgl., Bd. 5 (1925), S. 478/479.

punkt dargestellt wird. Dann ergibt sich für die vier geschilderten Plastizitätsbedingungen folgende Darstellung (vergl. Abb. 2):

$$\tau_{max} = K = \text{konst.} \quad \text{(Guest)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}.$$

Alle Versuchspunkte liegen auf dem Umfang eines regelmäßigen Sechsecks mit der halben Höhe K.

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2 = \text{konst.} \quad \text{(v. Mises)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Diese Gleichung stellt einen Kreis dar; denn führt man noch ein rechtwinkliges x-y-System ein, wie aus der Abbildung ersichtlich, so wird

$$y = \tau_1, \qquad x^2 + y^2 = \tau_2^2 + d^2$$

$$\tau_3 = -\tfrac{1}{2}(\tau_2 - d\sqrt{3}), \qquad d^2 = \tfrac{1}{3}(\tau_2 + 2\tau_3)^2$$

$$x^2 + y^2 = \tau_2^2 + \frac{1}{3}(\tau_2 + 2\tau_3)^2 = \frac{4\tau_2^2 + 4\tau_3^2 + 4\tau_2\tau_3}{3}.$$

Wegen $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ läßt sich aber die Bedingung $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2$ auch in der Form schreiben

$$2\tau_2^2 + 2\tau_3^2 + 2\tau_2\tau_3 = 2K^2,$$

und folglich ist

$$x^2 + y^2 = \frac{2K^2}{3},$$

das heißt: alle Versuchspunkte liegen auf einem Kreis vom Radius $\frac{2K}{\sqrt{3}}$ mit dem Zentrum im Koordinatenanfangspunkt, das heißt auf dem dem Sechseck von (II) umschriebenen Kreis.

$$\tau_{max} = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{(Mohr)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}.$$

Alle Versuchspunkte liegen auf der Oberfläche einer graden sechsseitigen Pyramide mit mit der Spitze im Koordinatenanfangspunkt. Die Höhenlinien dieser Fläche, auf die Horizontalebene senkrecht projiziert, ergeben Sechsecke, und alle Punkte mit gleichem f-Wert liegen auf dem Umfang eines solchen regelmäßigen Sechsecks.

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{(v. Mises)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Sämtliche Versuchspunkte liegen auf dem Mantel eines graden Kreiskegels mit der Spitze im Koordinatenanfangspunkt. Alle Versuchspunkte mit gleichem f liegen auf einem Breitenkreis dieses Kegels.

Ein Hauptvorteil dieser Methode liegt in der scharfen Unterscheidung zwischen der Anordnung der Versuchspunkte auf einer Sehne — Fließbedingung (II) und (III) — oder dem zugehörigen Kreisbogen — (I) und (IV) —. Die Versuche von Hrn. Lode[1]) zeigen deutlich die Anordnung der Versuchspunkte auf dem Bogen.

Bei der Betrachtung des Fließvorganges selbst kann man im allgemeinen den Einfluß der Schwerkraft angesichts der auftretenden großen Spannungen vernachlässigen. Ich will mich hier außerdem, wie es die Herren Hencky und Prandtl in ihren für die neueste Entwicklung der Plastizitätstheorie grundlegenden Arbeiten tun, auf die Betrachtung sehr langsamer Fließvorgänge beschränken, die noch als eine Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen angesehen werden können. Die Gleichgewichtsbedingung lautet natürlich:

$$\nabla \mathfrak{P} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder, unter Beachtung von (9)

$$\nabla \mathfrak{P}' = \operatorname{grad} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\text{a}).$$

Dynamisch sucht man sich den Vorgang der plastischen Deformation durch ein Vorbeigleiten verschiedener Materialschichten aneinander vorzustellen. Bei gradliniger Parallelbewegung macht dies keine Schwierigkeit; gewisse Schichten des Materials haben andere Geschwindigkeiten als benachbarte, sie gleiten aneinander vorbei, und ihre Begrenzungslinien kann man als Gleitlinien betrachten. Diese Vorstellung versagt jedoch, sowie die Bewegung der einzelnen Teilchen in gekrümmten Bahnen vor sich geht. In der neueren Literatur werden vielfach als Gleitrichtungen die Richtungen maximaler Schubspannung im Körper bezeichnet, und dementsprechend als Gleitlinien diejenigen Linien, welche in jedem Punkt die Richtungen maximaler Schubspannung einhalten, obwohl dies nach dem Vorstehenden nicht als berechtigt erscheint. Ich will daher im folgenden diese Linien stets als Hauptschubspannungslinien bezeichnen. Sie bilden stets mit einer der drei Hauptachsrichtungen einen Winkel von 90^0, mit den beiden anderen solche von 45^0. Im ebenen Fall der plastischen Deformation bilden sie zwei ebene

[1]) Z. f. Phys. Bd. 36 (1926), S. 913; vergl. insbesondere Abb. 8, S. 925.

Scharen orthogonaler Kurven. Es liegt nahe, diese Linien zur Erklärung der sogenannten Fließfiguren heranzuziehen, der feinen Linien, die bereits in sehr zahlreichen Fällen auf der Oberfläche oder einer Trennungsfläche der verschiedensten plastisch deformierten Materialien beobachtet worden sind. Jedoch ist es zweifellos falsch, die Fließfiguren allgemein mit den Hauptschubspannungslinien zu identifizieren. Denn wenn man die Fließfiguren auffaßt als die Spuren der Mohrschen Gleitflächen an der Oberfläche des deformierten Körpers, so können sie sich nach der Mohrschen Hypothese nur für einen solchen Spannungsbereich überall senkrecht durchsetzen, für den man die Mohrsche Grenzkurve zum mindesten angenähert durch ein zur σ-Achse paralleles Geradenstück ersetzen kann. Diese Bedingung ist gut erfüllt bei relativ weichen Materialien, und tatsächlich durchsetzen sich bei diesen die Fließfiguren nahezu senkrecht; dagegen weicht der Winkel der Fließfiguren gegeneinander mit zunehmender Sprödigkeit des Materials immer mehr von 90^0 ab. In den Fällen aber, wo die Mohrsche Hypothese einen Winkel von 90^0 verlangt, können die Hauptschubspannungslinien wohl zur ungefähren Bestimmung des Verlaufs der Fließfiguren dienen — wobei allerdings zu beachten ist, daß die Hauptschubspannungslinien ihrer Definition nach kontinuierlich dicht nebeneinader verlaufen und somit niemals mit den in endlichen Abständen voneinander verlaufenden Fließfiguren identisch sein können. Jedenfalls ist es häufig von Wichtigkeit, den Verlauf der Hauptschubspannungslinien zu kennen. Die grundlegende Arbeit über Netze von Hauptschubspannungslinien stammt von Hrn. Hencky[1]); durch die daran anschließenden Untersuchungen der Herren Prandtl[2]), Schmidt-Carathéodory[3]) und v. Mises[4]) ist über Bau und Eigenschaften dieser Liniennetze im ebenen Fall der plastischen Deformation völlige Klarheit geschaffen worden. Darüber hinaus ist jedoch Hr. Hencky nur noch im sogenannten rotations- oder axialsymmetrischen Fall zu einigen speziellen Ergebnissen gelangt[5]). Er sagt über Systeme von »Gleitlinien«[6]): »Solche Systeme existieren nur beim ebenen und rotationssymmetrischen Problem immer; im allgemeinen räumlichen Fall gibt es allerdings solche Systeme nicht, da aber numerische Behandlung doch nur bei ebenen und rotationssymmetrischen Problemen möglich ist, so ist diese Einschränkung praktisch belanglos.« Ich werde jedoch im folgenden zeigen, daß man auch in komplizierteren, räumlichen Fällen gewisse Eigenschaften der Hauptschubspannungslinien angeben kann; dazu leite ich zunächst einige Hilfsformeln ab.

3. Ableitung von Hilfsformeln. Die Gleichgewichtsbedingung eines beliebigen kontinuierlichen Mediums, auf das keine äußeren Kräfte wirken, lautet bekanntlich

$$\nabla \mathfrak{P} = 0$$

in Worten: der derivierte Vektor der Spannungsdyade ist Null. Für das Folgende wird es nun wichtig sein, die Veränderung, die $\mathfrak{P}$ im Raum erfährt, in zwei Teile zu zerlegen: in den Teil, der von der Drehung der Hauptspannungsrichtungen und den, der von der Größenänderung der Hauptspannungen herrührt.

Ich untersuche also den Vektor

$$\nabla \mathfrak{P} = \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z},$$

das heißt den derivierten Vektor einer Dyade, die von Punkt zu Punkt ihre Hauptachsenlängen und ihre Hauptachsenrichtungen ändert. In praktischen Fällen können gewisse Bedingungen für die Aenderung der Hauptachsenrichtungen der Spannungsdyade $\mathfrak{P}$ von vornherein gegeben sein; so liegen zum Beispiel im ebenen Fall der plastischen Deformation zwei Hauptachsen von $\mathfrak{P}$ stets parallel zu einer festen Ebene, während die dritte Hauptachse die Richtung der Normalen dieser Ebene hat. Die Aenderung der Hauptachsenrichtungen eines Tensors $\mathfrak{P}$ kann man der Berechnung zugänglich machen durch die Einführung einer Dyade der Winkelgeschwindigkeiten, Ω, die folgendermaßen definiert sein soll:

Durch x, y, z werde ein im Raume festes rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem bezeichnet, durch ξ, η, ζ das Hauptachsensystem von $\mathfrak{P}$ in dem betrachteten Punkt. Schreitet man von einem beliebigen Punkt des Körpers, z. B. in der x-Richtung, fort, so dreht sich das Hauptachsendreibein von $\mathfrak{P}$ mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit, ω_x,

[1]) Diese Zeitschrift Bd. 3 (1923), S. 242 bis 251. — [2]) Desgl. S. 401 bis 406. — [3]) Desgl. S. 468 bis 475. — [4]) Desgl. Bd. 5 (1925), S. 147 bis 149. — [5]) Desgl. Bd. 3 (1923), S. 246 bis 251. — [6]) Desgl. S. 242, Zeile 11 von unten.

bezogen natürlich nicht auf den Zeitzuwachs, sondern auf den Zuwachs von x. Das heißt, $\bar{\omega}_x\, d\,x$ sei der unendlich kleine Drehungsvektor des Hauptachsenkreuzes von $\mathfrak{P}$ beim Fortschreiten um $d\,x$, und analog seien $\bar{\omega}_y$ und $\bar{\omega}_z$ erklärt. Einem Fortschreiten in beliebiger Richtung um $d\,s$, mit den Komponenten $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$, entspricht dann der Drehvektor $\bar{\omega}_x\, d\,x + \bar{\omega}_y\, d\,y + \bar{\omega}_z\, d\,z$. Daher bilden die ω eine Dyade, nämlich eine lineare Zuordnung von Vektoren zu den Richtungen des Raumes. Diese Dyade habe, auf die festen Achsen bezogen, das Schema

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \bar{\omega}_x \\ \bar{\omega}_y \\ \bar{\omega}_z \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_{x\,x}, & \omega_{x\,y}, & \omega_{x\,z} \\ \omega_{y\,x}, & \omega_{y\,y}, & \omega_{y\,z} \\ \omega_{z\,x}, & \omega_{z\,y}, & \omega_{z\,z} \end{matrix} \right. \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und, bezogen auf die beweglichen Hauptachsen von $\mathfrak{P}$,

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \bar{\omega}_\xi \\ \bar{\omega}_\eta \\ \bar{\omega}_\zeta \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_{\xi\,\xi}, & \omega_{\xi\,\eta}, & \omega_{\xi\,\zeta} \\ \omega_{\eta\,\xi}, & \omega_{\eta\,\eta}, & \omega_{\eta\,\zeta} \\ \omega_{\zeta\,\xi}, & \omega_{\zeta\,\eta}, & \omega_{\zeta\,\zeta} \end{matrix} \right. \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Der einer beliebigen Richtung ν zugeordnete Vektor $\bar{\omega}_\nu$ bestimmt sich demnach wieder durch die Transformationsformel (3)

$$\bar{\omega}_\nu = \bar{\omega}_x \cos(\nu, x) + \bar{\omega}_y \cos(\nu, y) + \bar{\omega}_z \cos(\nu, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Ich betrachte nun zwei infinitesimal benachbarte Lagen des Hauptachsendreibeins von $\mathfrak{P}$, die durch Fortschreiten in der x-Richtung auseinander hervorgegangen sind. Ich bezeichne ferner mit $\bar{\mathfrak{P}}$ diejenige Dyade, die bei dieser Verschiebung aus $\mathfrak{P}$ hervorgeht, wenn man nur die Aenderung der Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$ berücksichtigt, mit $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$ diejenige Dyade, die man bei Mitberücksichtigung der Aenderung der Hauptachsenlängen von $\mathfrak{P}$ erhält. $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ haben also dieselben Hauptachsenrichtungen. Dann wird, wenn unter $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ Einheitsvektoren in den festen x, y, z-Richtungen verstanden werden,

$$\frac{\partial\, \mathfrak{p}_x}{\partial\, x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cdot \mathfrak{i} - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{i}}{\Delta\, x}$$

oder, indem man einige Glieder subtrahiert und wieder addiert,

$$\frac{\partial\, \mathfrak{p}_x}{\partial\, x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cdot \mathfrak{i} - \bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i} + \bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i} - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{i}^* + \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{i}^* - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{i}}{\Delta\, x}$$

wobei $\mathfrak{i}^*$ den Einheitsvektor in einer Richtung bezeichnen möge, die zu dem alten Hauptachsendreibein ebenso liegt, wie die feste x-Richtung zu dem neuen. Es ist also

$$\frac{\partial\, \mathfrak{p}_x}{\partial\, x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cdot \mathfrak{i} - \bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i}}{\Delta\, x} + \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cdot \mathfrak{i} - \bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i}^*}{\Delta\, x} + \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i}^* - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{i}}{\Delta\, x}.$$

Diese drei Grenzwerte berechne ich nun gesondert. Ich bezeichne mit $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ die Einheitsvektoren in den Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$ bzw. $\bar{\mathfrak{P}}$, mit $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ die entsprechenden Einheitsvektoren in den Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ von $\mathfrak{P}$, und verwende für $\mathfrak{P}$, auf Hauptachsen bezogen, das in **1.** eingeführte Schema

$$\mathfrak{P} = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1, & 0, & 0, \\ 0, & \sigma_2, & 0, \\ 0, & 0, & \sigma_3, \end{matrix} \right. \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cdot \mathfrak{i} - \bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{i}}{\Delta\, x} &= \lim_{\Delta x = 0} \frac{[\sigma_1 (x + \Delta x, y, z) - \sigma_1 (x, y, z)]\, \bar{\mathfrak{i}} \cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{i})}{\Delta\, x} \\ &+ \lim_{\Delta x = 0} \frac{[\sigma_2 (x + \Delta x, y, z) - \sigma_2 (x, y, z)]\, \bar{\mathfrak{j}} \cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})}{\Delta\, x} \\ &+ \lim_{\Delta x = 0} \frac{[\sigma_3 (x + \Delta x, y, z) - \sigma_3 (x, y, z)]\, \bar{\mathfrak{k}} \cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{k})}{\Delta\, x}, \end{aligned}$$

das heißt, unter Hinzunahme der beiden entsprechenden Gleichungen für Fortschreiten in der y- und z-Richtung

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\bar{\mathfrak{P}}\cdot\mathfrak{i}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}}{\Delta x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\cdot\cos(x,\mathfrak{i}')\cdot\mathfrak{i}' + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\cdot\cos(x,\mathfrak{j}')\cdot\mathfrak{j}' + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}\cdot\cos(x,\mathfrak{k}')\cdot\mathfrak{k}'$$

$$\lim_{\Delta y=0} \frac{\bar{\mathfrak{P}}\cdot\mathfrak{j}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{j}}{\Delta y} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}\cdot\cos(y,\mathfrak{i}')\cdot\mathfrak{i}' + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}\cdot\cos(y,\mathfrak{j}')\cdot\mathfrak{j}' + \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}\cdot\cos(y,\mathfrak{k}')\cdot\mathfrak{k}'$$

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\bar{\mathfrak{P}}\cdot\mathfrak{k}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{k}}{\Delta z} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}\cdot\cos(z,\mathfrak{i}')\cdot\mathfrak{i}' + \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}\cdot\cos(z,\mathfrak{j}')\cdot\mathfrak{j}' + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z}\cdot\cos(z,\mathfrak{k}')\cdot\mathfrak{k}'.$$

Den zweiten Grenzwert

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}^*}{\Delta x}$$

berechne ich folgendermaßen:

Da der Einheitsvektor $\mathfrak{i}^*$, wie oben gesagt, zu dem Hauptachsendreibein von $\mathfrak{P}$ in dem betrachteten Punkt ebenso liegen soll wie der Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ zu dem (infinitesimal gedrehten) Hauptachsenkreuz von $\mathfrak{P}$, und da $\bar{\mathfrak{P}}$ dieselben Hauptachsenlängen hat wie $\mathfrak{P}$, so haben die beiden Vektoren $\bar{\mathfrak{P}}\cdot\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}^*$ gleiche Länge und gehen durch eine unendlich kleine Drehung mit dem Drehvektor $\bar{\omega}_x\,dx$ auseinander hervor. Bekanntlich legt nun bei der Rotation eines starren Körpers mit dem Drehvektor $\bar{\omega}$ ein Punkt des Körpers mit dem vektoriellen Abstande $\mathfrak{a}$ von einem beliebigen Punkt der Drehachse in der Zeit dt den Weg

$$\bar{\omega}\,dt\times\mathfrak{a}$$

zurück. Dieser Fall liegt aber hier vor; der — etwa starr gedachte — Vektor $\mathfrak{p}_x$ rotiert mit dem Drehvektor $\bar{\omega}_x$ und der Weg seines freien Endpunktes für die Verschiebung dx ist

$$\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}^* = \bar{\omega}_x\,dx\times\mathfrak{p}_x.$$

Daher erhält man

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}-\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}^*}{\Delta x} = \bar{\omega}_x\times\mathfrak{p}_x.$$

Entsprechend findet man für den dritten Grenzwert:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{i}^*-\mathfrak{P}\mathfrak{i}}{\Delta x} = -\mathfrak{P}\cdot\lim_{\Delta x=0}\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}^*}{\Delta x} = -\mathfrak{P}(\bar{\omega}_x\times\mathfrak{i}).$$

Es wird also

$$\begin{aligned}\nabla\mathfrak{P} = &\left[\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\cos(x,\mathfrak{i}')+\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\cos(y,\mathfrak{i}')+\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}\cos(z,\mathfrak{i}')\right]\cdot\mathfrak{i}'\\ &+\left[\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\cos(x,\mathfrak{j}')+\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}\cos(y,\mathfrak{j}')+\frac{\partial\sigma_2}{\partial z}\cos(z,\mathfrak{j}')\right]\cdot\mathfrak{j}'\\ &+\left[\frac{\partial\sigma_3}{\partial x}\cos(x,\mathfrak{k}')+\frac{\partial\sigma_3}{\partial y}\cos(y,\mathfrak{k}')+\frac{\partial\sigma_3}{\partial z}\cos(z,\mathfrak{k}')\right]\cdot\mathfrak{k}'\\ &+\bar{\omega}_x\times\mathfrak{p}_x-\mathfrak{P}(\bar{\omega}_x\times\mathfrak{i})+\bar{\omega}_y\times\mathfrak{p}_y-\mathfrak{P}(\bar{\omega}_y\times\mathfrak{j})+\bar{\omega}_z\times\mathfrak{p}_z-\mathfrak{P}(\bar{\omega}_z\times\mathfrak{k})\end{aligned}$$

oder, unter Beachtung der Beziehung

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\cos(x,\mathfrak{i}')+\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\cos(y,\mathfrak{i}')+\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}\cos(z,\mathfrak{i}'),$$

wobei $\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}$ definiert sei als die Komponente von grad σ_1 in der ξ-Richtung

$$\begin{aligned}\nabla\mathfrak{P} = &\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}\cdot\mathfrak{i}'+\frac{\partial\sigma_2}{\partial\eta}\cdot\mathfrak{j}'+\frac{\partial\sigma_3}{\partial\zeta}\cdot\mathfrak{k}'\\ &+\omega_x\times\mathfrak{p}_x-\mathfrak{P}(\omega_x\times\mathfrak{i})+\omega_y\times\mathfrak{p}_y-\mathfrak{P}(\omega_y\times\mathfrak{j})+\omega_z\times\mathfrak{p}_z-\mathfrak{P}(\omega_z\times\mathfrak{k})\quad(24).\end{aligned}$$

Mithin erhält man für die Komponente des Vektors $\nabla\mathfrak{P}$ in der ξ-Richtung:

$$\begin{aligned}(\nabla\mathfrak{P})_\xi = &\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}+(\omega_x)_\eta\cdot(\mathfrak{p}_x)_\zeta-(\omega_x)_\zeta\cdot(\mathfrak{p}_x)_\eta-\sigma_1\left[(\omega_x)_\eta\cos(x,\zeta)-(\omega_x)_\zeta\cos(x,\eta)\right]\\ &+(\omega_y)_{\eta_1}\cdot(\mathfrak{p}_y)_\zeta-(\omega_y)_\zeta\cdot(\mathfrak{p}_y)_{\eta_1}-\sigma_1\left[(\bar{\omega}_y)_{\eta_1}\cos(y,\zeta)-(\bar{\omega}_y)_\zeta\cos(y,\eta)\right]\\ &+(\bar{\omega}_z)_{\eta_1}\cdot(\mathfrak{p}_z)_\zeta-(\bar{\omega}_z)_\zeta\cdot(\mathfrak{p}_z)_{\eta_1}-\sigma_1\left[(\bar{\omega}_z)_\eta\cos(z,\zeta)-(\bar{\omega}_z)_\zeta\cos(z,\eta)\right],\end{aligned}$$

wobei die Formel benutzt wurde:

$$\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_1\cos(x,\xi)+\mathfrak{p}_2\cos(x,\eta)+\mathfrak{p}_3\cos(x,\zeta).$$

Daraus folgt weiter

$$(\mathfrak{p}_x)_\xi = \sigma_1 \cos(x,\xi); \quad (\mathfrak{p}_x)_\eta = \sigma_2 \cos(x,\eta); \quad (\mathfrak{p}_x)_\zeta = \sigma_3 \cos(x,\zeta),$$

und man erhält demnach

$$(\nabla \mathfrak{P})_\xi = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + (\sigma_3 - \sigma_1)[(\bar{\omega}_x)_\eta \cos(x,\zeta) + (\bar{\omega}_y)_\eta \cos(y,\zeta) + (\bar{\omega}_z)_\eta \cos(z,\zeta)]$$
$$+ (\sigma_1 - \sigma_2)[(\bar{\omega}_x)_\zeta \cos(x,\eta) + (\bar{\omega}_y)_\zeta \cos(y,\eta) + (\bar{\omega}_z)_\zeta \cos(z,\eta)]$$

und entsprechende Formeln für die beiden anderen Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$. Unter Beachtung von (4) und (23) ergeben sich daher die Schlußformeln:

$$\left.\begin{aligned}(\nabla \mathfrak{P})_\xi &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - 2\tau_2 \cdot \omega_{\zeta\eta} - 2\tau_3 \cdot \omega_{\eta\zeta} \\ (\nabla \mathfrak{P})_\eta &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} - 2\tau_3 \cdot \omega_{\xi\zeta} - 2\tau_1 \cdot \omega_{\zeta\xi} \\ (\nabla \mathfrak{P})_\zeta &= \frac{\partial \sigma_3}{\partial \zeta} - 2\tau_1 \cdot \omega_{\eta\xi} - 2\tau_2 \cdot \omega_{\xi\eta}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Diese Formeln gelten für den derivierten Vektor einer beliebigen (symmetrischen) Dyade, die von Punkt zu Punkt ihre Hauptachsenrichtungen mit den durch die Dyade Ω gegebenen Winkelgeschwindigkeiten und ihre Hauptachsenlängen ändert. Dabei erscheinen die Komponenten des Vektors $\nabla \mathfrak{P}$ in den Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$ ausgedrückt durch die Aenderung der Hauptachsenlängen von $\mathfrak{P}$ und durch die Komponenten der Winkelgeschwindigkeitsdyade Ω, bezogen auf die Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$; jedoch treten die Glieder der Hauptdiagonale von Ω in diesen Formeln nicht auf.

Aus (25) folgt, in Verbindung mit der Gleichgewichtsbedingung $\nabla \mathfrak{P} = 0$,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} = 2\tau_2 \cdot \omega_{\zeta\eta} + 2\tau_3 \cdot \omega_{\eta\zeta}; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} = 2\tau_3 \cdot \omega_{\xi\zeta} + 2\tau_1 \cdot \omega_{\zeta\xi}; \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \zeta} = 2\tau_1 \cdot \omega_{\eta\xi} + 2\tau_2 \cdot \omega_{\xi\eta} \quad (26).$$

Diese Formeln sollen im folgenden, unter Zugrundelegung der engeren Mohrschen (Guestschen) Plastizitätsbedingung

$$\tau_{max} = \text{konst.}$$

zur Untersuchung der Hauptschubspannungslinien in verschiedenen Fällen der plastischen Deformation verwendet werden. Und zwar werde ich mich zunächst darauf beschränken, die betrachteten Probleme nur unter Beachtung der drei Gleichgewichtsbedingungen und der Plastizitätsbedingung zu behandeln; in dem letzten Abschnitt werde ich dann die Frage untersuchen, inwieweit die betrachteten Spannungszustände tatsächlich mit den Annahmen über die Natur der plastischen Deformation verträglich sind, die durch den Saint-Venantschen Ansatz der linearen Abhängigkeit von reduziertem Spannungstensor und Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten bedingt werden.

4a. Anwendung auf den ebenen Fall. Unter dem ebenen Problem der plastischen Deformation versteht man die Untersuchung eines Fließvorganges, bei welchem eine Hauptachse des Spannungstensors überall feste Richtung hat und bei dem in allen zu dieser Richtung normalen Ebenen dieselben Spannungszustände herrschen. Man kann sich in diesem Falle auf die Betrachtung einer einzigen Ebene beschränken. Wir nehmen also an, daß zwei Hauptachsen von $\mathfrak{P}$, zum Beispiel ξ und η, stets in dieser Ebene liegen, während die dritte Hauptachse, ζ, die Richtung der Normalen dieser Ebene hat. Wählt man nun ein festes Koordinatensystem so, daß die x- und die y Achse ebenfalls in der betrachteten Ebene liegen, die z-Richtung mithin mit der ζ-Richtung zusammenfällt, so kann sich das Hauptachsendreibein von $\mathfrak{P}$ überhaupt nur um die z-Richtung drehen. Bezeichnet man mit ϑ den Winkel irgendeiner in der $x\,y$-Ebene mitgedrehten Achse gegen die feste x-Richtung, so wird

$$\omega_\xi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \cdot \mathfrak{k}; \quad \bar{\omega}_\eta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \cdot \mathfrak{k}; \quad \bar{\omega}_\zeta = 0,$$

wobei $\mathfrak{k}$, wie vorhin, den Einheitsvektor in der z-Richtung bezeichnet. Die Dyade Ω hat also, auf die Hauptachsen von $\mathfrak{P}$ bezogen, das Schema

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} 0, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \\ 0, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \\ 0, & 0, & 0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27);$$

somit ergibt sich aus den Formeln (26)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} = 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}; \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} = 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \zeta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Beschränkt man sich auf die Betrachtung von Fließvorgängen, bei welchen die in der Normalenrichtung wirkende Hauptspannung σ_3 der Größe nach die mittlere ist, so erhält die Guestsche Plastizitätsbedingung die Form

$$\tau_{\max} = \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \text{konst.}$$

oder $$\sigma_1 = \sigma_2 + \text{konst.}$$

d. h. $$\text{grad}\,\sigma_1 = \text{grad}\,\sigma_2,$$

und man erhält aus den Gl. (28)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} = 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}; \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} = 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

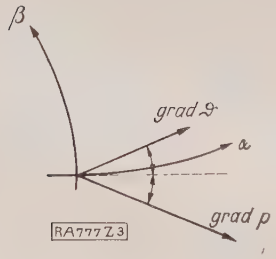

Abb. 3.

Definiert man als erste Hauptschubrichtung diejenige, welche durch Drehung um 45^0 im positiven Sinne aus der ξ-Richtung entsteht, so besagen die Gl. (29): Der Gradient von σ_1 ist gleich dem an der ersten Hauptschubrichtung gespiegelten Gradienten von ϑ, multipliziert mit $2\tau_3$, was der Einfachheit halber so geschrieben werden soll:

$$\text{grad}\,\sigma_1 = 2\tau_3 \cdot (\text{grad}\,\vartheta)^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Führt man weiter ein krummliniges α-β-Kurvennetz in der Weise ein, daß die Kurven $\beta = \text{konst.}$ stets die erste Hauptschubrichtung einhalten, die Kurven $\alpha = \text{konst.}$ stets die zur ersten rechtssinnig orthogonale zweite Hauptschubrichtung, so folgt aus (30) (vergl. Abb. 3):

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha} = 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}; \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} = -2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

wobei man unter ϑ den Winkel der ersten Hauptschubrichtung gegen die feste x-Richtung verstehen kann. Differenziert man die erste der Gl. (31) nach β, die zweite nach α, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Dies ist aber die Formel (16) der oben genannten Arbeit der Herren Schmidt und Carathéodory über Hencky-Prandtl-Kurven[1]); ist sie für ein ebenes Netz orthogonaler Kurven erfüllt, so sind dies Hencky-Prandtl-Kurven. Damit ist also die Uebereinstimmung mit den Henckyschen Ergebnissen für den ebenen Fall erwiesen.

4 b. Der Fall gleicher Spannungszustände in den Normalebenen einer beliebigen Raumkurve. Ich will nun weiter den Fall betrachten, daß an Stelle der Parallelebenen eine beliebige Ebenenschar tritt. Es soll also eine der drei Hauptachsen von $\mathfrak{P}$ stets in die Tangentenrichtung einer gegebenen Raumkurve, nämlich der Orthogonaltrajektorie der Ebenen, weisen und im übrigen die Spannungsdyade mit dem Begleitdreikant dieser Raumkurve fest verbunden sein. Wieder kann man sich auf die Betrachtung einer einzigen Normalebene der gegebenen Raumkurve beschränken und annehmen, daß zwei Hauptachsen von $\mathfrak{P}$, zum Beispiel ξ und η, stets in dieser Ebene liegen, während die dritte Hauptachse, ζ, stets in die — entsprechend gewählte — Tangentenrichtung der Raumkurve weist. Unter einer Parallelkurve der ursprünglichen Raumkurve will ich, wie üblich, eine Kurve verstehen, die alle Normalebenen der Ausgangskurve senkrecht durchsetzt[2]). Ich bezeichne mit $\mathfrak{x}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der ursprünglichen Kurve, mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Einheitsvektoren in den Achsrichtungen ihres begleitenden Dreikants, mit s ihre Bogenlänge, gerechnet von einem festgewählten Anfangspunkt aus, mit $1/\varrho$ ihre Krümmung, mit $1/\tau$ ihre Windung in einem beliebigen Punkt. Die entsprechenden Elemente der Parallelkurven mögen durch Ueberstreichen gekennzeichnet werden. Um zu einer Nachbarkurve der gewünschten Art zu gelangen, machen wir den Ansatz:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + a(s) \cdot \xi_2 + b(s) \cdot \xi_3 ,$$

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 469.

[2]) Vergl. hierzu und zu den folgenden rein differentialgeometrischen Ueberlegungen Scheffers, Theorie der Kurven, Abschnitt III, **6.**

wobei a und b beliebige reelle, mindestens einmal differenzierbare Funktionen bezeichnen mögen. Damit es sich um eine Parallelkurve handle, ist zu verlangen, daß die Vektoren $\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \xi_1$ und $\frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds}$ parallel sind. Nach den Frenetschen Formeln wird

$$\frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds} = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\xi_1 + \left(\frac{da}{ds} - \frac{b}{\tau}\right)\xi_2 + \left(\frac{db}{ds} + \frac{a}{\tau}\right)\xi_3 .$$

Demnach ist die benachbarte Kurve eine Parallelkurve, wenn die folgenden Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\frac{da}{ds} - \frac{b}{\tau} = 0 , \qquad \frac{db}{ds} + \frac{a}{\tau} = 0.$$

Die Integration gelingt mit Hilfe der Substitution

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\tau};$$

denn dann erhalten diese Differentialgleichungen die Form:

$$\frac{da}{dt} = b , \qquad \frac{db}{dt} = -a.$$

Die neuen Gleichungen werden durch den Ansatz befriedigt

$$a = -m\cos t + n\sin t , \qquad b = m\sin t + n\cos t ,$$

wobei m und n beliebige Konstanten bedeuten. Demnach ergibt sich für die zweifach unendliche Schar der Parallelkurven einer beliebigen Raumkurve die Darstellung

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + (-m\cos t + n\sin t)\,\xi_2 + (m\sin t + n\cos t)\,\xi_3, \quad t = \int_0^s \frac{ds}{\tau} \quad . \quad . \quad (33).$$

Aus (33) liest man für die Länge des Vektors $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}$ leicht die Beziehung ab:

$$\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = m^2 + n^2 = \text{konst.},$$

das heißt: entsprechende Punkte der Ausgangskurve und einer Parallelkurve haben konstanten Abstand voneinander.

Aus

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\xi_1 \quad \text{folgt} \quad \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)^2.$$

Setzt man nun

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 - \frac{a}{\varrho} = 1 - \frac{-m\cos t + n\sin t}{\varrho},$$

so bedeutet dies, da sich für $m = 0$, $n = 0$ die ursprüngliche Kurve ergibt, daß wir auf allen Parallelkurven wachsende Bogenlängen entsprechend der Orientierung der Ausgangskurve zählen. Dann ergibt sich aber weiter:

$$\frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = \xi_1 ,$$

das heißt:

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1.$$

Ferner

$$\frac{d\bar{\xi}_1}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\xi}_1}{ds} \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{\frac{d\xi_1}{ds}}{1 - \frac{a}{\varrho}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\bar{\xi}_2}{\bar{\varrho}} = \frac{\xi_2}{\varrho - a}.$$

das heißt:

$$\bar{\varrho}^2 = (\varrho - a)^2.$$

Trifft man die Festsetzung, daß eine reelle Raumkurve stets positive Krümmung haben soll[1]), so muß man setzen:

$$\bar{\varrho} = \varepsilon(\varrho - a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

mit $\varepsilon = +1$ für $\varrho > a$, $\varepsilon = -1$ für $\varrho < a$ oder $\bar{\xi}_2 = \varepsilon \cdot \xi_2$.

[1]) Vergl. z. B. Scheffers, Theorie der Kurven, Abschnitt III **6.**, Formel (20) u. folg. Zeilen.

In entsprechenden Punkten haben daher die Achsen des begleitenden Dreikants einer beliebigen Parallelkurve dieselben Richtungen wie diejenigen der Ausgangskurve, abgesehen von der Orientierung der Haupt- und Binormalen[1]). In einer jeden Normalebene der Ausgangskurve gibt es also eine feste Haupt- und Binormalenrichtung für alle Parallelkurven; unter einander entsprechenden Punkten der Normalebenen der erzeugenden Raumkurve will ich natürlich Punkte verstehen, die auf derselben Parallelkurve liegen.

Wir kommen nun zur Aufstellung der Dyade Ω. Nach den zu Beginn dieses Abschnittes gemachten Annahmen hat man davon auszugehen, daß die Hauptachsen von $\mathfrak{P}$ mit dem begleitenden Dreibein der betreffenden Parallelkurve starr verbunden sind, so daß die Drehvektoren des Hauptachsenkreuzes bei Fortschreiten in der Tangentenrichtung dieselben sind wie die des begleitenden Dreikants. Die Komponenten des Drehvektors des begleitenden Dreibeins einer beliebigen Raumkurve, bezogen auf den Zuwachs der Bogenlänge, sind aber: die Windung in der Tangentenrichtung und die Krümmung in der Binormalenrichtung, während eine Komponente in der Hauptnormalenrichtung nicht vorhanden ist[2]). Beschränkt man sich daher wieder auf die Betrachtung einer bestimmten Normalebene und wählt man ein festes kartesisches x, y, z Koordinatensystem so, daß die x-Richtung übereinstimmt mit der Hauptnormalenrichtung, die y-Richtung mit der Binormalenrichtung und die z-Richtung mit der Tangentenrichtung der Parallelkurven für diese Ebene, so erhält man für Ω, bezogen auf diese festen Achsen, das Schema

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 0\,, & 0\,, & \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x} \\ 0\,, & 0\,, & \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,y} \\ 0\,, & \frac{1}{\varrho}\,, & \frac{1}{\tau} \end{Bmatrix},$$

wobei ϑ den Winkel der ersten Hauptschubrichtung gegen die feste x Richtung bezeichnet. Bezieht man das Schema von Ω auf die Hauptachsen ξ, η, ζ von $\mathfrak{P}$, so erhält man

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 0\,, & 0\,, & \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\xi} \\ 0\,, & 0\,, & \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\eta} \\ \frac{1}{\varrho}\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), & \frac{1}{\varrho}\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), & \frac{1}{\tau} \end{Bmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (26) folgt daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,\sigma_1}{\partial\,\xi} &= 2\,\tau_2 \cdot \frac{1}{\varrho}\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + 2\,\tau_3 \cdot \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\eta} \\ \frac{\partial\,\sigma_2}{\partial\,\eta} &= 2\,\tau_3 \cdot \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\xi} + 2\,\tau_1 \cdot \frac{1}{\varrho}\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{\partial\,\sigma_3}{\partial\,\zeta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35).$$

Wieder sei angenommen, daß τ_3 die größte Hauptschubspannung ist; bei dem hier behandelten Problem kommt man jedoch mit der Guestschen Plastizitätsbedingung

$$\tau_{\max} = \tau_3 = \text{konst.}$$

allein zu keinem brauchbaren Ergebnis, da dann in den Endgleichungen Ableitungen von τ_1 und τ_2 nach den Koordinaten auftreten. Ich beschränke mich daher auf die Betrachtung von Fällen, in denen man alle drei Hauptschubspannungen als konstant annehmen kann, eine Annahme, die jedenfalls mit der Guestschen und mit der engeren v. Misesschen Plastizitätsbedingung ($\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = \text{konst.}$) vereinbar ist. In diesem Falle wird

$$\sigma_1 + p = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = {}^2/_3\,(\tau_2 - \tau_3) = \text{konst.}$$

$$\sigma_2 + p = {}^2/_3\,(\tau_3 - \tau_1) = \text{konst.}$$

$$\sigma_3 + p = {}^2/_3\,(\tau_1 - \tau_2) = \text{konst.}$$

oder

$$\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} \sigma_\nu\,, \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

[1]) Scheffers, a. Gl. O., Abschnitt III **6.**, Satz 25.

[2]) Vergl. z. B. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I **8.**

Demnach erhalten die Gleichungen (35) die Form

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -2\tau_2 \cdot \frac{1}{\varrho}\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) - 2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - 2\tau_1 \cdot \frac{1}{\varrho}\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$$

oder, in eine Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\text{grad}\, p = -2\tau_3 \cdot (\text{grad}\,\vartheta)^* - 2\tau_2 \cdot \frac{1}{\varrho}\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \mathfrak{i}' - 2\tau_1 \cdot \frac{1}{\varrho}\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \mathfrak{j}' \quad (36),$$

wobei das Zeichen »*« wiederum Spiegelung an der ersten Hauptschubrichtung bedeuten soll, $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ Einheitsvektoren in der ξ- und η-Richtung. Ich untersuche nun, wie im ebenen Fall, das Hauptschubspannungsliniennetz ($\alpha = \text{konst.}$, $\beta = \text{konst.}$) in der betrachteten Ebene, und zwar suche ich eine Differentialgleichung für den Richtungswinkel ϑ der Kurven $\beta = \text{konst.}$ gegen die feste x-Richtung aufzustellen. Da die Hauptschubspannungslinien ein ebenes Netz orthogonaler Kurven bilden, so kann man das Bogenelement in der Form ansetzen

$$d s^2 = d \mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{x}_\alpha\, d\alpha + \mathfrak{x}_\beta\, d\beta)^2 = A^2\, d\alpha^2 + B^2\, d\beta^2$$

mit

$$A = \mathfrak{x}_\alpha = \frac{d s}{d \alpha} > 0\,; \qquad B = \mathfrak{x}_\beta = \frac{d s}{d \beta} > 0,$$

und demnach ist, da $\mathfrak{x}_\alpha$ Tangente an die Kurven $\beta = \text{konst.}$ ist, $\mathfrak{x}_\beta$ Tangente an die Kurven $\alpha = \text{konst.}$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = A\cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -B\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

In unserem besonderen Falle ist nach (34)

$$\varrho = \varepsilon\,(\varrho - a) = \varepsilon\,(\varrho - x)\,,$$

wobei ϱ eine Konstante bezeichnet. Demnach erhalten die Gleichungen (37) die Form

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = -\varepsilon \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\varepsilon A\cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = -\varepsilon \frac{\partial x}{\partial \beta} = +\varepsilon B\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Aus (36) folgt unter Beachtung der Formeln

$$\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\,; \qquad \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\vartheta - \cos\vartheta).$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = -2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} - \tau_2 \cdot \frac{A}{\varrho}(\cos\vartheta + \sin\vartheta) - \tau_1 \cdot \frac{A}{\varrho}(\sin\vartheta - \cos\vartheta)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = +2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \tau_2 \cdot \frac{B}{\varrho}(\cos\vartheta + \sin\vartheta) - \tau_1 \cdot \frac{B}{\varrho}(\sin\vartheta - \cos\vartheta)$$

oder, unter Beachtung der Relation (5)

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= -2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \tau_3 \cdot \frac{A}{\varrho}\sin\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\cdot \frac{A}{\varrho}\cos\vartheta \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} &= +2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \tau_3 \cdot \frac{B}{\varrho}\cos\vartheta - (\tau_1 - \tau_2)\cdot \frac{B}{\varrho}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Ich differenziere die erste dieser Gleichungen nach β, die zweite nach α, und erhalte

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} = -2\tau_3 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{A}{\varrho}\cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}[\tau_3\cos\vartheta + (\tau_2 - \tau_1)\sin\vartheta]$$

$$+ [\tau_3\sin\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\cos\vartheta]\cdot\left(-\frac{A}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial \beta} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} = +2\tau_3 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{B}{\varrho}\cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}[\tau_3\sin\vartheta + (\tau_2 - \tau_1)\cos\vartheta]$$

$$- [\tau_3\cos\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\sin\vartheta]\left(-\frac{B}{\varrho^2}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right).$$

Nun gelten für ein ebenes orthogonales Kurvennetz die Beziehungen[1]):

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = -B\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}; \qquad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = A\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40).$$

Demnach folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = -2\tau_3 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}[\tau_3 \cos\vartheta + (\tau_2 - \tau_1)\sin\vartheta]$$
$$+ [\tau_3 \sin\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\cos\vartheta]\left(-\frac{\varepsilon A B}{\varrho^2}\sin\vartheta - \frac{B}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = +2\tau_3 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}[\tau_3 \sin\vartheta + (\tau_2 - \tau_1)\cos\vartheta]$$
$$- [\tau_3 \cos\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\sin\vartheta]\left(\frac{\varepsilon A B}{\varrho^2}\cos\vartheta + \frac{A}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right)$$

oder, indem man die erste dieser Gleichungen von der zweiten subtrahiert

$$4\tau_3 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\cdot 2\tau_3 \sin\vartheta - \frac{A}{\varrho}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\cdot 2\tau_3 \cos\vartheta - \frac{\varepsilon A B}{\varrho^2}\cdot\tau_3 \cdot \cos 2\vartheta = 0.$$

Beachtet man noch die Beziehung

$$\frac{1}{\varrho} = \varepsilon\left(\varrho - x\right),$$

so ergibt sich schließlich nach Division durch $4\tau_3$:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B}{2(\varrho - x)}\sin\vartheta\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} - \frac{A}{2(\varrho - x)}\cos\vartheta\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{AB}{4(\varrho - x)^2}\cos 2\vartheta = 0 \quad (41)$$

mit $\varepsilon = +1$ für $\varrho > x$, $\varepsilon = -1$ für $\varrho < x$.

Wählt man als erzeugende Kurve der Parallelkurvenschar eine Gerade, d. h. ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} = 0,$$

so hat man das ebene Problem, und die Gl. (41) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Diese Gleichung, die wir bereits direkt für das ebene Problem abgeleitet haben, ist, wie man leicht sieht, stets erfüllt, wenn das Netz der Hauptschubspannungslinien gebildet wird von einer ebenen Schar von Parallelkurven und deren Normalen, wobei die erstere Schar im besonderen ebenfalls gradlinig sein kann. Es liegt nahe zu fragen, was von dieser Aussage bei dem hier behandelten Problem gleicher Spannungszustände in den Normalebenen einer beliebigen Raumkurve erhalten bleibt. Sollen zunächst beide Scharen gradlinig sein, so muß sein:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \qquad A = 1, \qquad B = 1;$$

mithin vereinfacht sich die Gl. (41) zu

$$\cos 2\vartheta = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vartheta = \pm \pi/4,$$

d. h.: Ein gradliniger Verlauf beider Scharen von Hauptschubspannungslinien ist nur möglich für eine Neigung von $\pm 45^0$ gegen die Hauptnormalenrichtung der erzeugenden Raumkurve.

Um den Fall der Parallelkurven mit ihren Normalen untersuchen zu können, bezeichne ich mit R_β bzw. R_α die Krümmungsradien der Kurven $\alpha =$ konst. bzw. $\beta =$ konst. Dabei sollen die Krümmungsradien positiv gerechnet werden, wenn der Krümmungsmittelpunkt in die Richtung wachsender α bzw. β fällt. Dann ist

$$\frac{1}{R_\beta} = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}; \qquad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

[1]) Relationen (8) und (9) der mehrfach erwähnten Arbeit der Herren Schmidt und Carathéodory über Hencky-Prandtl-Kurven.

[2]) Relationen (10) und (11) der mehrfach genannten Arbeit der Herren Schmidt und Carathéodory.

Demnach gelten in dem Fall, daß die eine Schar von Hauptschubspannungslinien gebildet wird von Parallelkurven, die andere von deren Normalen, unter den aus Abb. 4 ersichtlichen Annahmen, die Beziehungen:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = 0\,, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = 1\,, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0\,, \qquad A = 1$$

und, wegen (42),

$$B = -R_\alpha.$$

Mithin erhält die Gl. (41) die vereinfachte Form:

$$-\cos\vartheta - \frac{R_\alpha}{2\,(x-\varrho)}\cos 2\,\vartheta = 0$$

oder:

$$2\,(x-\varrho) = -\frac{\cos 2\,\vartheta}{\cos\vartheta}\cdot R_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

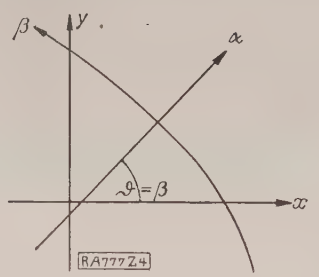

Abb. 4.

Betrachtet man eine einzelne Kurve $\alpha = \text{konst.}$ — ihre Gleichung sei $y = y\,(x)$ —, so ist:

$$\operatorname{cotg}\vartheta = -y' = -\frac{dy}{dx}, \qquad \cos\vartheta = \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\vartheta}} = \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$R_\alpha = -\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \qquad \cos 2\,\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1.$$

Folglich erhält die Gl. (43) die Form

$$-2\,(x-\varrho) = \frac{(1+y'^2)^2}{y'\cdot y''}\left(\frac{2\,y'^2}{1+y'^2} - 1\right) \qquad \text{oder} \qquad y'' = \frac{y'^4 - 1}{-2\,(x-\varrho)\,y'}.$$

Setzt man

$$y' = u\,,$$

so ergibt sich für u die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$u' = \frac{u^4 - 1}{-2\,(x-\varrho)\,u}.$$

Wie man durch Differenzieren leicht bestätigt, lautet die Lösung dieser Differentialgleichung — ϱ ist natürlich eine Konstante —

$$u = \left[\frac{(x-\varrho)^2 + c}{(x-\varrho)^2 - c}\right]^{1/2},$$

so daß sich für die gesuchte Funktion y die Darstellung ergibt:

$$y = \int \sqrt{\frac{(x-\varrho)^2 + c}{(x-\varrho)^2 - c}}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Sollen also im Falle gleicher Spannungszustände in den Normalebenen einer beliebigen Raumkurve, unter der Voraussetzung, daß alle τ_ν konstant sind, die Hauptschubspannungslinien gebildet werden von einer Schar von Parallelkurven und deren gemeinsamen Normalen, so müssen die Kurven von der Form (44) sein, d. h. es kommen überhaupt nur gewisse elliptische Kurven in Frage, mit Ausnahme eines Spezialfalles. Setzt man nämlich

$$c = 0 \quad \text{oder} \quad \infty, \quad \text{so wird} \quad y = \pm x + \text{konst.},$$

d. h. man erhält den bereits erwähnten Fall der parallelen Graden unter $\pm\, 45^0$ Neigung.

Es läßt sich leicht zeigen, daß der axialsymmetrische Fall der plastischen Deformation ein Spezialfall des hier behandelten Problems ist. Denn betrachtet man im besonderen den Fall gleicher Spannungszustände in den Normalebenen eines Kreises, so hat man das axialsymmetrische Problem, da alle diese Ebenen eine Grade, eben die Symmetrieachse, gemeinsam haben. Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Ergebnisse gelten also im besonderen auch für das axialsymmetrische Problem. Bezeichnet man den Abstand irgendeines Punktes von der Symmetrieachse mit r, so ergibt sich für die Dyade Ω, bezogen auf ein festes rechtshändiges Radial-, Axial-, Tangentialsystem (x, y, z)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0\,, & 0\,, & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ 0\,, & 0\,, & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ 0\,, & -\frac{1}{r}\,, & 0 \end{pmatrix},$$

wobei ϑ den Winkel der ersten Hauptschubrichtung gegen die feste x Achse bezeichnet, und, bezogen auf die Hauptachsen ξ, η, ζ von $\mathfrak{P}$,

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \\ 0, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \\ -\frac{1}{r}\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), & -\frac{1}{r}\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \end{Vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45);$$

für die Aenderung des mittleren Druckes im axialsymmetrischen Fall erhält man daher die Gleichungen (39) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= -2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} - \tau_3 \cdot \frac{A}{r}\sin\vartheta - (\tau_1 - \tau_2)\frac{A}{r}\cos\vartheta \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} &= +2\tau_3 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \tau_3 \cdot \frac{B}{r}\cos\vartheta + (\tau_1 - \tau_2)\frac{B}{r}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Da Hr. Hencky bei der Behandlung des axialsymmetrischen Problems[1]) eine spezielle Annahme über die Größe der drei Hauptspannungen macht, welche die Konstanz aller drei Hauptschubspannungen zur Voraussetzung hat, so müssen die hier abgeleiteten Ergebnisse für diesen Spezialfall mit den Henckyschen übereinstimmen.

Ich bezeichne die von Hrn. Hencky p genannte Größe mit p'; dann sind in dem von ihm betrachteten Spezialfall die Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = p' + K; \qquad \sigma_2 = p' - K; \qquad \sigma_3 = p' + K,$$

es ist also:

$$p' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der größten und kleinsten Hauptspannung. Weiter ist

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\frac{2}{3}p' - \frac{p' + K}{3}$$

oder $$p = -p' + \text{konst.}, \qquad \text{d. h.} \quad \operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} p'.$$

Die Hauptschubspannungen ergeben sich zu

$$\tau_1 = +K; \quad \tau_2 = 0; \quad \tau_3 = -K.$$

Zu den Henckyschen Bezeichnungen kann man durch die Beziehungen übergehen $\frac{\partial r}{\partial \alpha} = A\cos\vartheta$, $\frac{\partial r}{\partial \beta} = -B\sin\vartheta$, $A = \frac{1}{h_1}$, $B = \frac{1}{h_2}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = -h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)$.

Dann erhalten die Gleichungen (46) die Form

$$\frac{\partial p'}{\partial \alpha} = 2K\left\{h_2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right\},$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \beta} = 2K\left\{h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \beta}\right\}.$$

Dies sind aber die Henckyschen Gleichungen (10)[2]), und damit ist also die Uebereinstimmung mit den Henckyschen Ergebnissen erwiesen.

4 c. Der Fall gleichartiger Spannungsverteilungen in beliebigen Parallelflächen. Das ebene Problem der plastischen Deformation kann noch in einer anderen Richtung verallgemeinert werden. Ich will nämlich jetzt den Fall betrachten, daß eine Hauptachse des Spannungstensors stets in die Richtung der gemeinsamen Flächennormalen einer Schar beliebiger Parallelflächen weist und daß in diesen Parallelflächen gleichartige Spannungsverteilungen vorhanden sind, gleichartig insofern, als in Punkten derselben Flächennormalen die Hauptachsenrichtungen von $\mathfrak{P}$ dieselben sein sollen. Unter einer Parallelfläche zu einer beliebigen Fläche verstehe ich dabei, wie üblich, eine Fläche, die man erhält, indem man auf allen Normalen der ursprünglichen Fläche dasselbe Stück, etwa a, abträgt. Dann erhält man das Gaußsche Krümmungsmaß $\overline{K}$ und die mittlere

[1]) Diese Zeitschrift, Bd. 3 (1923), S. 246 bis 251

[2]) Hencky, a. gl. O., S. 247.

Krümmung $\overline{H}$ dieser Parallelfläche aus den entsprechenden Krümmungen K und H der ursprünglichen Fläche durch die Formeln

$$\overline{K} = \frac{K}{1 - 2\,a\,H + a^2\,K} \quad . \quad . \quad . \quad (47), \qquad \overline{H} = \frac{H - a\,K}{1 - 2\,a\,H + a^2\,K} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

und die Flächennormalenrichtung ist für beide Flächen dieselbe [1]).

Wieder wird man sich auf die Betrachtung *einer* Fläche beschränken können. Ich nehme an, genau entsprechend dem ebenen Fall, daß die Hauptachsen ξ und η des Spannungstensors $\mathfrak{P}$ stets in der Tangentenebene der betrachteten Fläche liegen, während die dritte Hauptachse, ζ, stets die Richtung der gemeinsamen Flächennormalen sämtlicher Parallelflächen hat. Die Bestimmung der Dyade der Winkelgeschwindigkeiten gelingt hier durch folgende allgemeinere Ueberlegung.

Das Linienelement einer beliebigen Fläche sei, bezogen auf orthogonale Parameterlinien $\alpha = \text{konst.}$, $\beta = \text{konst.}$, in der Form gegeben:

$$d\,s^2 = A^2\,d\,\alpha^2 + B^2\,d\,\beta^2, \qquad A = \frac{d\,s}{d\,\alpha} > 0\,, \qquad B = \frac{d\,s}{d\,\beta} > 0.$$

Mit den Parameterlinien denke ich mir ein rechtshändiges rechtwinkliges ξ, η, ζ-Dreikant derart verknüpft, daß der Ursprungspunkt stets auf der Fläche liegt und daß die Achsen ξ und η stets Tangenten an die Kurven $\beta = \text{konst.}$ und $\alpha = \text{konst.}$ in Richtung wachsender Parameter sind, während die dritte Achse, ζ, ständig in die Richtung der Flächennormalen weist. Bewegt sich der Ursprung dieses Achsendreikants, in Abhängigkeit von einem beliebigen Parameter, etwa der Zeit t, über die Fläche, so ändern sich die Richtungen der Achsen; die Komponenten des Drehvektors des Achsensystems, bezogen auf die beweglichen Achsen, lassen sich in der Form ausdrücken [2]):

$$p_1\frac{d\,\alpha}{d\,t} + p_2\frac{d\,\beta}{d\,t}, \qquad q_1\frac{d\,\alpha}{d\,t} + q_2\frac{d\,\beta}{d\,t}, \qquad r_1\frac{d\,\alpha}{d\,t} + r_2\frac{d\,\beta}{d\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

wo die Größen $p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2$ Funktionen von α und β sind. Die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 der Fläche erhält man aus diesen Größen durch die Gleichung

$$R^2\,(p_1\,q_2 - p_2\,q_1) - R\,(A\,p_2 - B\,q_1) + A\,B = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

und es ist ferner

$$r_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \qquad r_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$

Die übrigen vier Größen — $p_1, p_2; q_1, q_2$ — sind untereinander und mit r_1, r_2 durch gewisse Differentialgleichungen verknüpft, die von Codazzi aufgestellt worden sind; die Größen $p_1 \ldots q_2$ lassen sich jedoch sofort angeben, wenn man als Parameterlinien ($u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$) im besonderen die Krümmungslinien der Fläche wählt. Dann erhält das Linienelement der Fläche die Form

$$d\,s^2 = U^2\,d\,u^2 + V^2\,d\,v^2, \qquad U = \frac{d\,s}{d\,u} > 0\,, \qquad V = \frac{d\,s}{d\,v} > 0$$

und es ist

$$p_1 = 0\,, \qquad q_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$r_1 = -\frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial v}; \qquad r_2 = -\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Demnach sind die Wurzeln der Gl. (50) in diesem Falle

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{q_1}{U}; \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{p_2}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Das Schema der Dyade Ω, bezogen auf ein Hauptachsensystem von $\mathfrak{P}$, dessen beide ersten Achsen, x und y, stets die Richtung der Krümmungslinien innehalten, während die z-Achse in die Richtung der Flächennormalen weist, will ich vorübergehend so schreiben:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \overline{\omega_x} \\ \overline{\omega_y} \\ \overline{\omega_z} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{Vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

[1]) Vergl. z. B. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I, § 51, Nr. 7.

[2]) Die Beweise für die in dieser allgemeineren Ueberlegung benutzten Tatsachen können nachgelesen werden in: Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, §§ 322/23, und Anmerkungen, Bem. C.

Beachtet man dann die Formeln (51), (52), (53) sowie die leicht einzusehenden Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{U}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{V},$$

so ergibt sich aus (49):

$$\omega_{xx} = p_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \omega_{xy} = q_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{R_1}, \qquad \omega_{xz} = r_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{UV}\frac{\partial U}{\partial v}$$

$$\omega_{yx} = p_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R_2}, \qquad \omega_{yy} = q_2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \omega_{yz} = r_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{UV}\frac{\partial V}{\partial u}, \qquad \bar{\omega}_z = 0.$$

Setzt man das Linienelement einer beliebigen Fläche in der Form an

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

so wird die geodätische Krümmung einer Kurve $\beta = \text{konst.}$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}$$

dargestellt[1]). Für die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien setze ich demgemäß

$$\frac{1}{\varrho_v} = -\frac{1}{UV}\frac{\partial U}{\partial v}; \qquad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{1}{UV}\frac{\partial V}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

und es ist also

$$\omega_{xz} = \frac{1}{\varrho_v}, \qquad \omega_{yz} = \frac{1}{\varrho_u}.$$

Bewegt sich der Ursprung des betrachteten Achsensystems in einer beliebigen Richtung ν über die Fläche, so erhält man den Drehvektor $\bar{\omega}_\nu$ aus der Transformationsformel (3)

$$\bar{\omega}_\nu = \bar{\omega}_x \cos(x, \nu) + \bar{\omega}_y \cos(y, \nu) + \bar{\omega}_z \cos(z, \nu).$$

Will man aber jetzt die Winkelgeschwindigkeiten des Hauptachsensystems von $\mathfrak{P}$ angeben, so kommt noch die Aenderung der Winkel der Hauptachsen ξ und η gegen die Krümmungslinien hinzu. Bezeichnet man den Winkel der ξ-Achse gegen die Richtung wachsender u mit φ, so ergibt sich — beispielsweise für $\bar{\omega}_\xi$ —, wenn $\bar{\mathfrak{k}}$ den Einheitsvektor in der z-Richtung bezeichnet

$$\bar{\omega}_\xi = \bar{\omega}_x \cos(\xi, x) + \bar{\omega}_y \cos(\xi, y) + \bar{\omega}_z \cos(\xi, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \bar{\mathfrak{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Ich will die Rechnung für $\omega_{\xi\eta}$ durchführen

$$\omega_{\xi\eta} = (\bar{\omega}_x)_\eta \cos(\xi, x) + (\bar{\omega}_y)_\eta \cos(\xi, y) + (\omega_z)_\eta \cos(\xi, z) = \omega_{xx} \cos(\eta, x) \cos(\xi, x)$$
$$+ \omega_{xy} \cos(\eta, y) \cos(x, \xi) + \omega_{yx} \cos(\eta, x) \cos(\xi, y) + \omega_{yy} \cos(\eta, y) \cos(\xi, y),$$

d. h.

$$\omega_{\xi\eta} = -\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right).$$

Bezeichnet man also den Krümmungshalbmesser des Normalschnitts durch die Flächentangente in Richtung der ξ-Achse mit R_ξ, so erhält man für $\omega_{\xi\eta}$ nach der bekannten Eulerschen Formel, die die Krümmungen eines beliebigen Normalschnittes durch die Hauptkrümmungen auszudrücken gestattet[2]):

$$\omega_{\xi\eta} = -\frac{1}{R_\xi}.$$

Man erhält schließlich für die Dyade Ω, bezogen auf die Hauptachsen ξ, η, ζ des Spannungstensors, das Schema:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), & -\frac{1}{R_\xi}, & \frac{\cos\varphi}{\varrho_v} + \frac{\sin\varphi}{\varrho_u} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \\ \frac{1}{R_\eta}, & \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), & -\frac{\sin\varphi}{\varrho_v} + \frac{\cos\varphi}{\varrho_u} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix} \quad (58).$$

Liouville[3]) hat für die geodätische Krümmung einer beliebigen Flächenkurve folgenden Ausdruck angegeben: Es seien $\frac{1}{\varrho_v}$, $\frac{1}{\varrho_u}$ die geodätischen Krümmungen eines Systems von

[1]) Vergl. z. B. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I, § 69.
[2]) Vergl. z. B. Blaschke, Diff.-Geom., Bd. I, § 35, Gl. (26).
[3]) Monge, Application de l'Analyse a la Géométrie 1850, S. 575. — Vergl. auch Blaschke, Diff.-Geom. I, § 74, Lehrs. 6.

orthogonalen Parameterlinien. Dann gilt für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve, die die Linien $v = \text{konst.}$ unter dem Winkel φ durchsetzt,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi}{\varrho_v} + \frac{\sin\varphi}{\varrho_u} + \frac{d\varphi}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Bezeichnet man also die geodätische Krümmung einer Flächenkurve, die stets die Richtung der Hauptachse ξ bzw. η von $\mathfrak{P}$ einhält, mit $\frac{1}{\varrho_\xi}$ bzw. $\frac{1}{\varrho_\eta}$, so erhält das Schema (58) die vereinfachte Form:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), & -\frac{1}{R_\xi}, & \frac{1}{\varrho_\xi} \\ \frac{1}{R_\eta}, & \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), & \frac{1}{\varrho_\eta} \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix} \quad . \quad . \quad (60).$$

Mithin ergibt sich aus den Gleichungen (26):

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi} = 2\tau_3 \cdot \frac{1}{\varrho_\eta}, \qquad \frac{\partial\sigma_2}{\partial\eta} = 2\tau_3 \cdot \frac{1}{\varrho_\xi}, \qquad \frac{\partial\sigma_3}{\partial\zeta} = 2\tau_1 \cdot \frac{1}{R_\eta} - 2\tau_2 \cdot \frac{1}{R_\xi} \quad . \quad . \quad (61).$$

Ich betrachte nun das Netz der Hauptschubspannungslinien $\alpha = \text{konst.}$ und $\beta = \text{konst.}$ auf der Fläche und bezeichne mit $\frac{1}{\varrho_\beta}$ die geodätische Krümmung der Kurven $\beta = \text{konst.}$, mit $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ diejenige der Kurven $\alpha = \text{konst.}$ Gilt dann die Gleichung

$$\tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62),$$

d. h. ist entweder τ_3 die größte Hauptschubspannung, so daß die Gl. (62) durch die Guestsche Plastizitätsbedingung geliefert wird, oder aber, ist diese Gleichung infolge Konstanz aller drei Hauptschubspannungen erfüllt, so ergibt sich leicht aus den beiden ersten Formeln (61)

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} = 2\tau_3 \cdot \frac{A}{\varrho_\beta}, \qquad \frac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} = -2\tau_3 \cdot \frac{B}{\varrho_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Für die geodätischen Krümmungen der Kurven $\beta = \text{konst.}$ und $\alpha = \text{konst.}$ ist zu setzen:

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} \qquad \frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Demnach folgt aus (63):

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} = -2\tau_3 \cdot \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} = -2\tau_3 \cdot \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Formt man die Gleichungen (31) für das ebene Problem um mit Hilfe der für ebene orthogonale Kurvenscharen geltenden Beziehungen (40)

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial\beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha},$$

so erhält man genau die Gleichungen (65) für den Fall beliebiger Parallelflächen.

Um die differentialgeometrischen Eigenschaften der α-β-Kurven zu untersuchen, differenziere ich die erste der Gleichungen (65) nach β, die zweite nach α und subtrahiere die erhaltenen Gleichungen voneinander; es ergibt sich

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß einer beliebigen Fläche kann man in der Form schreiben[1]):

$$ABK = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

Addiert und subtrahiert man die Gleichungen (66) und (67), so erhält man

$$-2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) = ABK \quad . \quad . \quad (68); \qquad -2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) = ABK \quad . \quad (69).$$

[1]) Blaschke, Diff.-Geom., Bd. I, § 63, Formel (93).

Nach (64) ist $\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} = -\frac{A}{\varrho_\beta}, \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{B}{\varrho_\alpha}.$

Man kann also die Gl. (69) auch in der Form schreiben

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{\varrho_\alpha}\right) = -\frac{ABK}{2} \quad \text{oder:} \quad \frac{1}{\varrho_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{B}{\varrho_\alpha^2}\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{ABK}{2};$$

hieraus durch Multiplikation mit $\frac{\varrho_\alpha^2}{B}$ und Beachtung von (64)

$$A - \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{AK}{2}\varrho_\alpha^2$$

oder: $$\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial \alpha} - A = \frac{AK}{2}\varrho_\alpha^2 \quad . \quad . \quad (70) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \varrho_\beta}{\partial \beta} + B = -\frac{BK}{2}\varrho_\beta^2 \quad . \quad (71),$$

wie man ähnlich aus (68) findet.

Aus (47) $$\overline{K} = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K}$$

folgt, daß die Parallelflächen einer beliebigen abwickelbaren Fläche ($K = 0$) ebenfalls die konstante Krümmung Null haben. Für alle auf die Ebene abwickelbaren Flächen, die man bekanntlich auch Torsen nennt, mit Einschluß der Ebene selbst, werden daher die Gleichungen (70) und (71)

$$\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{ds}{d\alpha} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (72), \qquad \frac{\partial \varrho_\beta}{\partial \beta} + \frac{ds}{d\beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Bis auf eine kleine Abweichung im Vorzeichen bei (72), die von einer verschiedenen Annahme des Vorzeichens der geodätischen Krümmung der Kurven $\alpha =$ konst. herrührt, sind dies aber genau die Gleichungen (14) und (15) der mehrfach genannten Arbeit der Herren Schmidt und Carathéodory über Hencky-Prandtl-Kurven; nur ist an die Stelle der gewöhnlichen die geodätische Krümmung der α-β-Kurven getreten, entsprechend dem Umstande, daß für Kurven in einer Ebene die geodätische Krümmung mit der gewöhnlichen identisch ist.

Wir erhalten somit für Netze von Hauptschubspannungslinien auf Torsen folgenden Satz:

Auf allen abwickelbaren Flächen ($K = 0$) wird das Hauptschubspannungsliniennetz gebildet von zwei Scharen orthogonaler Kurven mit folgender Eigenschaft:

Der geodätische Krümmungsradius[1]) der Kurven der einen Schar in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Kurve der anderen nimmt bei Durchlaufung der letzteren um die Länge des durchlaufenen Bogens ab bzw. zu, je nachdem man auf Kurven $\alpha =$ konst. bzw. $\beta =$ konst. fortschreitet[2]).

Da sowohl Bogenlänge als geodätische Krümmung Biegungsinvarianten sind ex definitione, so folgt aus den Gleichungen (72) und (73), daß auf Flächen, die aufeinander verbiegbar, d. h. längentreu abbildbar sind, die Hauptschubspannungslinien dieselben differentialgeometrischen Eigenschaften haben; denn zwei beliebige Flächen konstanter Krümmung sind bekanntlich dann im Kleinen aufeinander verbiegbar, wenn sie gleiches Gaußsches Krümmungsmaß haben[3]).

Insbesondere kann man die Hauptschubspannungsliniennetze auf beliebigen abwickelbaren Flächen dadurch erhalten, daß man die Ebene mit den nach bekannten Methoden zu findenden Hencky-Prandtl-Kurven auf die betreffende Torse aufwickelt.

Wie schon erwähnt, sind in der Ebene alle beliebigen Parallelkurven nebst ihren gemeinsamen Normalen Hencky-Prandtl-Kurven. Da bei der Verbiegung die Geraden der Ebene in geodätische Linien auf der abwickelbaren Fläche übergehen, so folgt, daß auf Torsen die Hauptschubspannungslinien stets gebildet werden können von einer Schar geodätischer Linien nebst deren orthogonalen Trajektorien, speziell also auch von zwei Scharen zueinander orthogonaler geodätischer Linien.

---

[1]) Der geodätische Krümmungsradius sei definiert als der reziproke Wert der geodätischen Krümmung.

[2]) Dabei sind die geodätischen Krümmungen der Kurven $\beta =$ konst. und $\alpha =$ konst. definiert durch (64)

$$\frac{1}{\varrho_\beta} \quad \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \qquad \frac{1}{\varrho_\alpha} \quad \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

[3]) Vergl. z. B. Blaschke, Diff.-Geom., Bd. I, § 60.

Eine gewisse Bestätigung finden die hier abgeleiteten Ergebnisse in neueren Versuchen von Hrn. A. Nádai in Göttingen, über die dieser in verschiedenen Zeitschriften unter Beifügung zahlreicher Abbildungen berichtet hat[1]).

Betrachtet man nämlich den Fall gleichartiger Spannungszustände in parallelen Zylinderflächen, so folgt aus deren Abwickelbarkeit auf die Ebene nach dem vorstehend Gesagten, daß auf ihnen die Hauptschubspannungslinien stets gebildet werden können von zwei Scharen orthogonaler geodätischer Linien. Bei der Abwicklung der Ebene auf den Rotationszylinder gehen aber bekanntlich die Graden der Ebene, die ja die geodätischen Linien auf dem Zylinder liefern — abgesehen von den Sonderfällen der Mantellinien und der Breitenkreise —, in gemeine Schraubenlinien auf dem Zylinder über. Hr. Nádai hat bei Druckversuchen mit Rotationszylindern aus verschiedenen Materialien Netze von Schraubenlinien als Fließfiguren beobachtet und im Bilde festgehalten[2]). Nun können zwar, wie ich in **2.** näher ausgeführt habe, die Hauptschubspannungslinien nicht zur Erklärung der Fließfiguren herangezogen werden, aber sie können doch dazu dienen, sich ein ungefähres Bild von dem Verlauf der Fließfiguren zu machen, besonders dann, wenn die Mohrsche Theorie das Auftreten orthogonaler Fließfiguren verlangt, d. h. hauptsächlich bei sogenannten wirklich plastischen Materialien. Jedoch geht aus den hier angestellten Ueberlegungen hervor, daß die Fließfiguren auch für spröde Stoffe, bei beträchtlich von 90 Grad verschiedenen Winkeln gegeneinander, von Schraubenlinien gebildet werden können. Denn wegen der Winkeltreue der Verbiegung schließt eine solche Schraubenlinie mit allen Mantellinien des Zylinders gleiche Winkel ein. Verkleinert man alle diese Winkel um denselben Betrag, so erhält man wieder eine Schraubenlinie. In der Tat hat Hr. Nádai bei Druckversuchen mit Rotationszylindern aus Cararischem Marmor bedeutend steilere Schraubenlinien als bei Paraffinzylindern als Fließfiguren erhalten[3])

Kehren wir zu dem Fall beliebiger Parallelflächen zurück. Bezeichne ich vorübergehend den infinitesimalen Zuwachs der Bogenlänge auf Kurven $\beta = \text{konst.}$ mit $d s_\beta$, auf Kurven $\alpha = \text{konst.}$ mit $d s_\alpha$, so ergeben die Gleichungen (70) bzw. (71) nach Division durch A bzw. B,

$$\frac{d \varrho_\alpha}{d s_\beta} = 1 + \frac{K}{2} \varrho_\alpha{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (74), \qquad \frac{d \varrho_\beta}{d s_\alpha} = - \left(1 + \frac{K}{2} \varrho_\beta{}^2 \right) \quad . \quad . \quad (75).$$

Demnach erhalten wir allgemein den Satz:

Auf beliebigen Parallelflächen wird das Netz der Hauptschubspannungslinien gebildet von zwei Scharen zueinander orthogonaler Kurven mit folgender Eigenschaft:

Der geodätische Krümmungsradius der Kurven der einen Schar in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Kurve der anderen nimmt bei Durchlaufung eines infinitesimal kleinen Stückes der letzteren ab bzw. zu um die infinitesimale Länge des durchlaufenen Bogens, multipliziert mit dem um 1 vermehrten Produkt aus der halben Gaußschen Flächenkrümmung und dem Quadrate dieses geodätischen Krümmungsradius.

Ich will noch eine Differentialgleichung aufzustellen suchen, die der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$$

beim ebenen Problem entspricht. Dazu führe ich eine Funktion $\varepsilon (\alpha, \beta)$ ein, entsprechend der Funktion ϑ im ebenen Fall. Auf Grund der Gleichungen (65) kann man setzen

$$\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}, \qquad - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} \quad . \quad (76) \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma_1}{2 \tau_3} + \text{konst.} \quad . \quad . \quad (77).$$

Dann erhält man aus (68), (69) die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{A B} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{K}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78), \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{A B} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \alpha \partial \beta} = \tau_3 \cdot K \quad . \quad . \quad (79).$$

Aus (78) folgt sofort, daß für alle Flächen mit durchweg von Null verschiedenem Gaußschen Krümmungsmaß unter der Voraussetzung $\tau_3 \neq 0$ keine der beiden Scharen von

[1]) Zeitschr. f. Physik, Bd. 30 (1924), Heft 2, S. 106 bis 138, Berichte der Fachausschüsse des Vereins deutscher Eisenhüttenleute, Werkstoffausschuß, Bericht Nr. 56, Zeitschr. f. techn. Physik, 5. Jahrgang (1924), Nr. 9, S. 369 bis 378.

[2]) Vergl. z. B. in dem zuletzt genannten Bericht von Hrn. A. Nádai die Abb. 33, 34, 36, 37. 39 sowie besonders die Bemerkungen unter 8

[3]) A. Nádai, a. gl. O., Abb. 39.

Hauptschubspannungslinien nur geodätische Linien, d. h. Linien von der geodätischen Krümmung Null, enthalten kann. Denn aus

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{A\,B}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \equiv 0$$

folgt, weil A und B für nicht singuläre Flächenpunkte endlich sind,

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0$$

und hieraus nach (76)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0.$$

Dies steht aber für $K \neq 0$ im Widerspruch zu (78). Ist dagegen $\tau_3 = 0$, so sind geodätische Hauptschubspannungslinien möglich.

Es liegt nahe, die Differentialgleichung (78) vor allem für den Fall

$$K = \text{konst} \neq 0$$

zu untersuchen; hierzu ist zu bemerken, daß nicht jede beliebige Fläche konstanter von Null verschiedener Krümmung die Eigenschaft besitzt, daß ihre Parallelflächen ebenfalls konstantes Gaußsches Krümmungsmaß haben. Vielmehr zeigen die Gleichungen (47), (48)

$$K = \frac{K}{1 - 2\,a\,H + a^2 K}, \qquad \bar{H} = \frac{K - a\,H}{1 - 2\,a\,H + a^2 K},$$

daß diese Forderung dann und nur dann erfüllt ist, wenn auch die mittlere Krümmung H der Ausgangsfläche konstant ist, z. B. also bei konzentrischen Kugelflächen.

Vielleicht findet sich eine Möglichkeit, solche räumlichen Hauptschubspannungslinien ausgehend von der Gl. (78) durch Quadraturen zu bestimmen, ähnlich wie es die Herren Schmidt und Carathéodory in ihrer mehrfach erwähnten Arbeit über Hencky-Prandtl-Kurven für das ebene Problem durchgeführt haben.

5. Die Kompatibilitätsbedingungen beim ebenen und axialsymmetrischen Problem der plastischen Deformation. Als ebenes Problem der plastischen Deformation hatten wir in **4a** die Untersuchung eines Fließvorganges bezeichnet, bei dem eine Hauptachse des Spannungstensors überall in die feste z-Richtung weist und bei dem in allen zur z-Richtung orthogonalen Ebenen dieselben Spannungsverteilungen vorhanden sind. Es bestehen also die Beziehungen:

$$\tau_x = 0, \qquad \tau_y = 0, \qquad \sigma_z = \sigma_3, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Von den in **1** abgeleiteten sechs Kompatibilitätsbedingungen bleiben somit im ebenen Fall nur die folgenden vier übrig:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial y^2}[q\,(\sigma_3 + p)] = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}[q\,(\sigma_3 + p)] = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[q\,(\sigma_3 + p)] = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}[q\,(\sigma_y + p)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[q\,(\sigma_x + p)] = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[q\,\tau_{xy}] \end{aligned}\right\} \quad (80).$$

Die drei ersten dieser Gleichungen können durch den von der Elastizitätstheorie her bekannten Ansatz

$$\sigma_3 = -p$$

befriedigt werden. Es ist dann

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

und die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

in Verbindung mit der Fließbedingung

$$\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = K^2 = \text{konst.}$$

reichen zur Bestimmung der drei Größen σ_x, σ_y, τ_{xy} aus. Setzt man die für σ_x, σ_y, τ_{xy} gefundenen Werte in die letzte der Gleichungen (80) ein, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung als Bestimmungsgleichung für die Reaktionsgröße q. Das Problem ist somit völlig bestimmt; irgendeine Annahme über den Geschwindigkeits-

vektor $\mathfrak{v}$ der einzelnen Teilchen ist dabei nicht gemacht worden. Verlangt man aber, daß die Bewegung nur in der x-y-Ebene vor sich gehen soll ($v_z \equiv 0$), so ergibt sich nichts Neues.

Um die Kompatibilitätsbedingungen beim **axialsymmetrischen** Problem untersuchen zu können, führe ich Zylinderkoordinaten r, ϑ, y ein; als feste x-Richtung wähle ich die nach außen gehende Radialrichtung der Ebene $\vartheta = 0$, als feste y-Richtung die Axialrichtung nach oben, dazu rechtshändig als z-Richtung die zu der ersten senkrechte Radialrichtung. Dann gelten die Beziehungen:

$$x = r\cos\vartheta\,, \qquad y = y\,, \qquad z = -\,r\,\mathrm{sind}\,\vartheta.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\vartheta\,, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{r}\,, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\sin\vartheta\,, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{\cos\vartheta}{r}\,, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,.$$

Auf die festen Achsen x, y, z bezogen habe der Spannungstensor das Schema

$$\mathfrak{P} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_x \\ \mathfrak{p}_y \\ \mathfrak{p}_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x\,, & \tau_z\,, & \tau_y \\ \tau_z\,, & \sigma_y\,, & \tau_x \\ \tau_y\,, & \tau_x\,, & \sigma_z \end{Bmatrix};$$

da die dritte Hauptachse des Spannungstensors stets tangential gerichtet sein soll, ergibt sich, bezogen auf ein beliebiges Radial-, Axial-, Tangentialsystem, für $\mathfrak{P}$ das Schema:

$$\mathfrak{P} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_r \\ \mathfrak{p}_y \\ \mathfrak{p}_t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r\,, & \tau_t\,, & 0 \\ \tau_t\,, & \sigma_y\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & \sigma_t \end{Bmatrix}.$$

Nach der Transformationsformel für Tensoren gilt

$$\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_r\cos\vartheta + \mathfrak{p}_t\sin\vartheta.$$

Daher

$$\sigma_x = \sigma_r\cos\vartheta\cos\vartheta + \sigma_t\sin\vartheta\sin\vartheta = \sigma_r\cos^2\vartheta + \sigma_t\sin^2\vartheta.$$

Aehnlich findet man $\sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ ausgedrückt durch $\sigma_r, \sigma_y, \sigma_t, \tau_t$; im ganzen ergibt sich

$$\sigma_x = \sigma_r\cos^2\vartheta + \sigma_t\sin^2\vartheta\,, \qquad \tau_z = \tau_t\cos\vartheta\,, \qquad \tau_y = {}^1\!/_2\,(\sigma_t - \sigma_r)\sin 2\vartheta$$
$$\tau_z = \tau_t\cos\vartheta\,, \qquad \sigma_y = \sigma_y\,, \qquad \tau_x = -\,\tau_t\sin\vartheta$$
$$\tau_y = {}^1\!/_2\,(\sigma_t - \sigma_r)\sin 2\vartheta\,, \quad \tau_x = -\,\tau_t\sin\vartheta\,, \quad \sigma_z = \sigma_r\sin^2\vartheta + \sigma_t\cos^2\vartheta.$$

Dann erhalten die besonderen Annahmen über die Spannungsverteilung beim axialsymmetrischen Problem die Form

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \tau_t}{\partial \vartheta} = \frac{\partial q}{\partial \vartheta} = 0\,, \qquad \sigma_t = \sigma_3.$$

Wie in **2a** sei angenommen, daß alle drei Hauptschubspannungen τ_1, τ_2, τ_3 konstant sind,

d. h. $\quad \sigma_3 - \sigma_2 = \text{konst.}, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \text{konst.}, \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \text{konst.}$

oder auch $\quad \sigma_1 + p = \text{konst.}, \quad \sigma_2 + p = \text{konst.}, \quad \sigma_3 + p = \text{konst.}$

Ferner beschränke ich mich zunächst, da ja in allen Meridianebenen dieselben Spannungszustände herrschen sollen, auf die Betrachtung der Ebene $\vartheta = 0$.

Bezeichnet f eine beliebige Ortsfunktion, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta}{r}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial r}\sin\vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\vartheta - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\sin\vartheta}{r}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sin\vartheta - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\cos\vartheta}{r}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\sin\vartheta \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\cos\vartheta}{r}\,.$$

In der Ebene $\vartheta = 0$ gilt demnach:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

Demnach bleiben von den sechs Kompatibilitätsbedingungen (18) für die Ebene $\vartheta = 0$ — und damit natürlich für jede beliebige Meridianebene — nur die folgenden vier übrig:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[q(\sigma_y + p)] + (\sigma_t + p)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{2}{r}\frac{\partial(q\tau_t)}{\partial y}\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[q(\sigma_r + p)] + (\sigma_t + p)\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[(\sigma_r - \sigma_t)q]\\
&\frac{\partial^2}{\partial y^2}[q(\sigma_r + p)] + \frac{\partial^2}{\partial r^2}[q(\sigma_y + p)] = 2\frac{\partial^2(q\tau_t)}{\partial r \partial y}\\
&(\sigma_t + p)\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}[q(\sigma_r - \sigma_t)]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (81).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_t}{\partial y} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_t}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_t}{r} = 0.$$

Die letzte Gleichung läßt unmittelbar erkennen, daß für $\sigma_1 = \sigma_2$, d. h. wenn alle Richtungen in der Meridianebene gleichberechtigt sind, die Hauptspannung $\sigma_2 = \sigma_y$ und damit wegen

$$\sigma_\nu + p = \text{konst.} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

alle Spannungen längs der Symmetrieachse konstant bleiben, so daß man es eigentlich mit einer speziellen ebenen Spannungsverteilung zu tun hat; Hr. Hencky erwähnt dies kurz in seiner mehrfach genannten Arbeit über das axialsymmetrische Problem[1]).

Es läßt sich jedoch zeigen, daß aus den Kompatibilitätsbedingungen in diesem Falle mehr folgt. Beachtet man, daß für $\sigma_1 = \sigma_2$, d. h. $\tau_t = 0$, wegen

$$2\sigma_2 + \sigma_3 = -3p$$

die Relation besteht

$$2(\sigma_2 - \sigma_3) = -3(p + \sigma_3),$$

so vereinfachen sich die Verträglichkeitsbedingungen (81) zu

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma_1 + p}{r}\cdot\frac{\partial q}{\partial r} + (\sigma_3 + p)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\sigma_1 + p}{r}\cdot\frac{\partial q}{\partial r} + (\sigma_3 + p)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + 3\frac{\partial q}{\partial r}\right) = 0\\
&(\sigma_1 + p)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (\sigma_3 + p)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial y} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (82).$$

Die letzte dieser Gleichungen läßt sich durch den Ansatz

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

befriedigen, wie es ja dem ebenen Charakter des Problems entspricht. Aber dann ist die erste der Gleichungen (82), wegen der Unzulässigkeit der Annahme

$$\frac{\partial q}{\partial r} = 0, \qquad \text{d. h.} \quad q = \text{konst.},$$

nur durch den Ansatz

$$\sigma_1 = -p$$

zu befriedigen; wegen $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt dann aber

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p,$$

d. h. die Kompatibilitätsbedingungen lassen für $\sigma_1 = \sigma_2$ überhaupt nur eine Spannungsverteilung zu, wie sie in einer idealen Flüssigkeit herrscht, und damit nur einen Fließvorgang ohne Schiebungsgeschwindigkeiten.

Hr. Hencky behandelt in der genannten Arbeit den Fall, daß die Ringspannung σ_3 gleich einer der beiden Hauptspannungen in der Meridianebene ist. Um auch für diesen Fall die Kompatibilitätsbedingungen zu untersuchen, drücke ich zunächst alle Spannungs-

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923). S. 246.

größen durch die Hauptspannungen aus. Bezeichnet φ den Winkel der ersten Hauptachse gegen die Radialrichtung der betreffenden Meridianebene, so ist:

$$\sigma_r = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi, \qquad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\varphi, \qquad \tau_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi.$$

Die Kompatibilitätsbedingungen (81) erhalten also die Form — nach Elimination der Glieder mit $\cos^2\varphi$ —

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[q\sin^2\varphi] + \frac{\sigma_2+p}{r}\cdot\frac{\partial q}{\partial r} + (\sigma_3+p)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}\frac{\partial}{\partial y}[q\sin 2\varphi]\\
&\frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[q\cos^2\varphi] + \frac{\sigma_2+p}{r}\cdot\frac{\partial q}{\partial r} + (\sigma_3+p)\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} = \frac{2(\sigma_1-\sigma_2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}[q\cos^2\varphi]\\
&\qquad\qquad + \frac{2(\sigma_2-\sigma_3)}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\\
&(\sigma_1-\sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}[q\cos^2\varphi] + (\sigma_2+p)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + (\sigma_1-\sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}[q\sin^2\varphi] + (\sigma_2+p)\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}\\
&\qquad\qquad = (\sigma_1-\sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial y}[q\sin 2\varphi]\\
&(\sigma_3+p)\frac{\partial^2 q}{\partial r\,\partial y} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}\frac{\partial}{\partial y}(q\cos^2\varphi) + \frac{\sigma_2-\sigma_3}{r}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (83).$$

Setzt man nun etwa $\sigma_2 = \sigma_3$,

so werden die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_3+p)\left[-\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}(q\sin^2\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\right] = 0\\
&(\sigma_3+p)\left[\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}(q\cos^2\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial^2 q}{\partial r^2}\right] = 0\\
&(\sigma_3+p)\left[-3\frac{\partial^2}{\partial y^2}(q\cos^2\varphi) - 3\frac{\partial^2}{\partial r^2}(q\sin^2\varphi) + \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial y}(q\sin 2\varphi)\right] = 0\\
&(\sigma_3+p)\left[\frac{\partial^2 q}{\partial r\,\partial y} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (84).$$

Diese Gleichungen sind offenbar nur durch den Ansatz

$$\sigma_3 = -p$$

zu befriedigen; man kommt also wieder zu der Feststellung, daß nur ein Fließvorgang ohne Schiebungsgeschwindigkeiten mit der Spannungsverteilung

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

den Kompatibilitätsbedingungen genügt.

Der von Hrn. Hencky betrachtete Spezialfall des axialsymmetrischen Problems — eine Hauptspannung in der Meridianebene gleich der Ringspannung, die dritte aber von diesen beiden verschieden — stellt also bei Beachtung der aus der Proportionalität von Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten und reduziertem Spannungstensor folgenden Kompatibilitätsbedingungen keine mögliche Spannungsverteilung dar.

Andererseits geben aber die Gleichungen (81) keinen Aufschluß darüber, welche anderen, als Gleichgewichtszustände bei einem Fließvorgang zulässigen Spannungsverteilungen den Kompatibilitätsbedingungen genügen, und hieran ändert sich auch nichts, wenn man noch die Forderung hinzunimmt, daß die Bewegung der einzelnen Teilchen nur in den Meridianebenen erfolgen soll ($v_\varphi = 0$).

Noch komplizierter sind die Verhältnisse bei den übrigen in der vorliegenden Arbeit behandelten Problemen; so kann man zum Beispiel bei dem in **4c** betrachteten Fall, daß eine Hauptachse des Spannungstensors stets in die gemeinsame Normalenrichtung irgendwelcher Parallelflächen weist, wie die letzte der Gleichungen (61):

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial \zeta} = 2\tau_1 \cdot \frac{1}{R_\eta} - 2\tau_2 \cdot \frac{1}{R_\xi}$$

zeigt, nicht mehr annehmen, daß in parallelen Flächen nicht nur der Richtung, sondern auch der Größe nach gleiche Spannungsverteilungen vorhanden sind.

Man wird sich daher vorläufig darauf beschränken müssen, spezielle Fälle räumlicher Spannungsverteilungen, die als Gleichgewichtszustände bei einem Fließvorgang zulässig sind, daraufhin zu untersuchen, ob sie auch den Kompatibilitätsbedingungen der mathematischen Plastizitätstheorie genügen.

Lebenslauf

Ich, Werner Jenne, Sohn des verstorbenen Buchdruckereibesitzers und Stadtrats Hermann Jenne und seiner Ehefrau Elise geb. Hartwig, wurde am 22. November 1901 in Cöpenick bei Berlin geboren. Ich besuchte von Ostern 1908 ab die Körnerschule in Cöpenick; nach Ablegung der Reifeprüfung im Frühjahr 1920 studierte ich an der Universität Berlin bis zum Sommer-Semester 1926 Mathematik und Physik.

Allen meinen akademischen Lehrern, insbesondere den Herren Professoren Bieberbach, E. Kohlschütter, v. Mises, Planck, E. Schmidt, I. Schur, fühle ich mich zu größtem Danke verpflichtet.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und ihre Förderung durch wertvolle Hinweise verdanke ich Herrn Professor v. Mises in Berlin, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

Druck von A. W. Schade, Berlin N 39